
碩士學位論文

n형 게르마늄에서의 Hot-electron
자기 포논 공명효과에 대한 연구

濟州大學校 大學院

物理學科



제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

李 尚 七

1995年 12月

n형 게르마늄에서의 Hot-electron
자기 포논 공명효과에 대한 연구

指導教授 柳 在 演




李 尚 七

이 論文을 理學 碩士學位 論文으로 提出함

1995 年 12 月

李尚七의 理學 碩士學位 論文을 認准함



審査委員長 洪性榮 
委 員 崔致勳 
委 員 柳在演 

濟州大學校 大學院

1995 年 12 月

**A study of hot-electron magnetophonon
resonance in n-type Germanium**

Sang-Chil Lee

(Supervised by professor Jai-Yon Ryu)

A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF
THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF MASTER OF
NATURAL SCIENCES

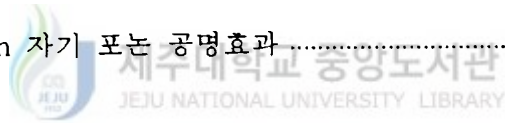


**DEPARTMENT OF PHYSICS
GRADUATE SCHOOL
CHEJU NATIONAL UNIVERSITY**

1995. 12

목 차

Summary	1
I. 서 론	2
II. 계의 모델	4
III. 이완함수와 관련된 비선형 자기 전도도	8
IV. Hot-electron 자기 포논 공명효과	11
V. 수치계산	14
VI. 결론	19
VII. 참고문헌	21
VIII. 부 록	23



Summary

The hot-electron magnetophonon resonances in n-type germanium under high magnetic fields are investigated by using the formalism of nonlinear response theory developed by Ryu et al.. The resonance originates from the difference in the effective mass between the initial and final states of the intervalley scattering by phonons. These resonance peak positions are shifted to the higher magnetic field side as the electric field is increased. The results obtained here are in good agreement with those available in the literature.



I. 서 론

자기 포논 공명(magnetophonon resonance:MPR)효과는 전자의 이완 산란 기구(즉, 에너지 획득과 손실과정), 전자와 포논간의 상호작용에 기인한 자기전도도의 진동 감쇠 효과(Nicholas, 1985), 강한 전기장에 기인한 내부 충돌장(intra-collisional field effects : ICFE) 효과 (Barker, 1973) 그리고 자기 전도도의 자기장 역수에 대한 주기성(Eaves 등 1975)에 연관된 포논 에너지 결정 등과 같은 반도체의 수송 성질을 조사하는데 유용한 수단으로 잘 알려져 있다. 약한 전기장과 강한 자기장하에서 전자와 포논이 상호작용하여 포논의 에너지가 두 Landau에너지 준위의 차이의 정수배가 될 때 포논에 의해서 전자의 공명 산란이 발생하는 것으로 그 공명조건은

$$\hbar \omega_L = P \hbar \omega_c = P \hbar eB_p/m^*, \quad P=1,2,3,\dots \quad (1.1)$$

으로 주어진다. 여기서 m^* 은 전자의 유효질량이고, ω_c 와 ω_L 은 각각 사이클로트론 진동수와 세로 광성 포논(LO) 진동수이며, B_p 는 공명 자기장이다. 이러한 약한 전기장하에서의 정규 자기 포논 공명효과(ordinary MPR)는 3차원 전자계에 대해서 실험 및 이론적인 관점에서 상당히 상세하게 연구되었다(Nicholas 1985, Eaves 등 1975, Futagawa 등 1993). 그러나 최근에 강한 전기장하에서는 자기 전도도의 새로운 자기 포논 공명현상인 hot-electron 자기 포논 공명효과가 n^+n^- -GaAs 구조계(Eaves 등 1984)와 n^+n^- -InP 구조계(Payling 등 1986)에서 관찰되었다. 전기장의 세기가 약할 때 자기 전도도의 극치값은 자기장 B_p 에서 발생하지만 전기장의 세기가 증가하게 되면 정규 자기 포논 공명의 극치값은 더 큰 자기장 쪽으로 이동하고 또한 정규 자기 포논 공명의 극치값 주위에 또 다른 보조 공명 봉우리가 발생함을 볼 수 있다.

최근에 이러한 정규 및 hot-electron 자기 포논 공명효과가 많은 골짜기(valley)구조를 갖는 n형 게르마늄에 대해서 실험 및 이론적인 관점에서 상당히 많은 관심을 가지게 되었다(Nicholas 1985, Eaves 등 1975, Futagawa 등 1993).

n형 게르마늄에서의 자기 포논 공명효과의 스펙트럼은 복잡한 포논분지와 전도 전자의 다양한 골짜기 간 전이(intervalley transition)때문에 아주 복잡하다 (Portal 등 1974, Hamaguchi 등 1983). 정규 자기 포논 공명효과는 단지 골짜기 내 산란 (intravalley scattering)에서만 관찰되지만, 포논 방출과정이 관련된 골짜기 간 산란 (intervalley scattering)은 주로 hot-electron 자기 포논 공명효과가 지배적으로 공헌한다고 알려져 있다. 훨씬 최근에 Kamata와 그의 동료들 (Kamada 등 1992, Yamada 등 1992, Futawa 등 1993)은 n형 게르마늄에서 가벼운 사이클로트론 질량을 갖은 골짜기에서 더 무거운 사이클로트론 질량을 가진 골짜기로의 산란에 의한 hot-electron 자기 포논 공명효과를 관찰하였다. 그들은 전기장의 세기에 무관한 hot-electron 자기 포논 공명효과의 공명장 (resonance fields)을 도출하여 실험 결과와 비교 분석하였다. 그들의 계산 결과는 실험 결과와 잘 일치하지만 강한 전기장 (hot-electron 영역)에서 매우 중요한 역할을 하는 내부 충돌장 효과를 고려하지 않았다는 단점이 있다 (Suzuki 1992). 그러므로 본 논문에서는 강한 전기장에 기인한 내부 충돌장 효과를 고려하여 hot-electron 자기 포논 공명효과를 설명하고, 또한 내부 충돌장 효과에 기인하는 공명장 변화를 조사하여, 그들의 실험 결과 (Kamada 등 1992, Yamada 등 1992, Futagawa 등 1993)와 비교분석하기로 한다.

본 논문에서는 강한 전기장하에서의 양자 통계 수송이론(Ryu와 Choi, 1991)을 토대로 하여, 많은 골짜기 구조를 갖는 물질계의 hot-electron 자기 포논 공명효과에 대한 이론을 도출하고, 이 이론을 사용하여 n형 게르마늄에 자기장 방향이 $B \parallel \langle 100 \rangle$, $B \parallel \langle 110 \rangle$, $B \parallel \langle 111 \rangle$ 와 같이 작용하는 경우에 대한 hot-electron 자기 포논 공명효과를 조사하고자 한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. II장에서는 강한 정전기장 및 강한 정자기장하에서 계의 모델을 기술하고, III장에서는 비선형 응답 이론의 결과를 이용하여 II장에서 구한 전자의 고유함수와 에너지 고유치를 사용하여 전기장에 의존하는 이완함수가 관련되는 비선형 자기 전도도를 계산하고, IV장에서는 내부 충돌장 효과가 나타나는 이완함수로 부터 hot-electron 자기 포논 공명조건을 소개한다. V장에서는 n형 게르마늄에 대한 수치계산을 제시하여 이론과 실험 결과와 비교 설명하고, 끝으로 VI장에서는 결론을 맺는다.

II. 계의 모델

결정 고체내에서 포논장과 상호작용하는 전자계의 전체 해밀토니안 (H)은

$$H = H_E + H_{ph} + H_{e-ph}, \quad (2.1)$$

$$H_E = \sum_{\alpha} \sum_{\alpha'} \langle \alpha | h_{eE} | \alpha' \rangle a_{\alpha}^{\dagger} a_{\alpha'}, \quad (2.2)$$

$$H_{ph} = \sum_q \hbar \omega_q (b_q^{\dagger} b_q + 1/2), \quad (2.3)$$

$$H_{e-ph} = \sum_q \sum_{\alpha \alpha'} [\langle \alpha | \gamma_q^- | \alpha' \rangle b_q + \langle \alpha | \gamma_q^+ | \alpha' \rangle b_q^{\dagger}] a_{\alpha}^{\dagger} a_{\alpha'} \quad (2.4)$$

와 같이 주어진다. 여기서 H_E 와 h_{eE} 는 각각 다전자계의 해밀토니안과 단일 전자 해밀토니안을 나타내고, α 는 단일전자의 고유상태에 관련된 양자수이며, a_{α}^{\dagger} (a_{α})는 전자의 생성(소멸)연산자이다. 또한 H_{ph} 와 H_{e-ph} 는 각각 포논 해밀토니안과 전자와 포논간의 상호작용 퍼텐셜에 대응하는 해밀토니안이고, γ_q^{\mp} ($\equiv C(q) \exp(\pm iq \cdot r)$)는 포논의 종류에 관계되는 상호작용 연산자로 $C(q)$ 는 전자와 포논간의 상호작용 퍼텐셜이다. b_q^{\dagger} (b_q)는 각각 운동량이 $\hbar q$, 에너지가 $\hbar \omega_q$ 인 포논의 생성(소멸)연산자이다.

식 (2.2)에 있는 단일 전자 해밀토니안에 대한 구체적인 표현을 나타내기 위해서 비등방형 유효질량을 갖는 전자의 에너지를 타원체라고 가정하고, 장축을 z 축으로 잡으면, z 축에 각 θ 만큼 경사진 정자기장 $\mathbf{B} = B(\sin \theta, 0, \cos \theta)$ (부록 (1A) 참조)과 균일한 외부전기장 $\mathbf{E} = E \hat{y}$ 이 작용할 때 단일 전자 해밀토니안 h_{eE} 은

$$h_{eE} = \frac{1}{2} (\mathbf{p} + e\mathbf{A}) \begin{pmatrix} 1/m_t & 0 & 0 \\ 0 & 1/m_t & 0 \\ 0 & 0 & 1/m_t \end{pmatrix} (\mathbf{p} + \mathbf{A}) + eEy \quad (2.5)$$

로 나타낼 수 있다. 여기서 \mathbf{A} 은 벡터퍼텐셜이고, \mathbf{p} 은 운동량 연산자이며, m_t 와 m_l 은 각각 전도대의 타원체 에너지면에 대한 세로와 가로 유효질량 성분을 나타낸다. 벡터퍼텐셜에 대한 Landau gauge를

$$\mathbf{A} = B(-y \cos \theta, 0, y \sin \theta) \quad (2.6)$$

와 같이 택하고, 전도대 s 골짜기에서 단일 전자의 규격화된 고유함수와 에너지 고유치를 각각 구하면

$$\langle \mathbf{r} | \lambda s \rangle \equiv \langle \mathbf{r} | N, k_x, k_z, s \rangle = U^s(\mathbf{r}) F_\lambda(\mathbf{r}), \quad (2.7)$$

$$E_\lambda^s = E_N^s(k_x, k_z) = \varepsilon_\lambda^s - eEy_\lambda^s + \frac{m_l m_t}{2m_B^s} V_d^2 + E_g^s, \quad (2.8)$$

$$\varepsilon_\lambda^s = (N+1/2) \hbar \omega_s + \frac{\hbar^2}{2m_B^s} \left(\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}}{B} \right)^2, \quad (2.9)$$

$$y_\lambda^s = \frac{\hbar}{eBm_B^s} \left[m_l k_z \sin \theta - m_l k_x \cos \theta + \frac{m_l m_t V_d}{\hbar} \right] \quad (2.10)$$

을 얻을 수 있다. 여기서 $N(=0, 1, 2, \dots)$ 은 Landau 준위 지수를 나타내고, k_x 와 k_z 은 각각 전자의 x 와 z 방향의 파수벡터 성분이며, 기호 s 은 전도대에 있는 골짜기의 지수를 가리킨다. $V_d(=E/B)$ 는 전자의 중심 유동속도이고, E_g^s 는 s 골짜기의 최소에너지를 가리키며, $\omega_s(=eB/m_s^*)$ 와 m_B^s 은 각각 s 골짜기에서의 사이클로트론 진동수와 자기장 방향의 유효질량을 나타낸다. 여기서 m_s^* 와 m_B^s 는

$$\frac{1}{m_s^{*2}} = \frac{\cos^2 \theta}{m_l^2} + \frac{\sin^2 \theta}{m_{lm_l}}, \quad (2.11)$$

$$m_B^s = m_l \cos^2 \theta + m_l \sin^2 \theta, \quad (2.12)$$

와 같이 정의되고(Futagawa 등 1993) 자기장의 방향에 따라 각각의 유효질량이 변함을 알 수 있다(부록 (1B) 참조). 식 (2.7)에 주어지는 $U^s(\mathbf{r})$ 은 s 골짜기의 Bloch 함수이며, 포락함수(envelope function) $F_\lambda(\mathbf{r})$ 는

$$F_\lambda(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{L_x L_z}} \phi_N(y-y_\lambda^s) \exp(ik_x x + ik_z z) \quad (2.13)$$

으로 주어진다. 여기서 $\phi_N(y-y_\lambda^s)$ 은 중심 y_λ^s 을 가지는 조화진동자의 고유함수이고, L_x 와 L_z 은 각각 x 와 z 방향의 규격화 상수이다. 앞으로는 포락함수의 양자수 λ 를 편의상 (N, k_x, k_z) 으로 나타내고, $\lambda+1$ 를 $(N+1, k_x, k_z)$ 로 표현하기로 한다.

Bloch함수가 세포주기 부분에서 전자의 파수벡터 \mathbf{k} 와 전기장과 자기장의 세기에 무관하다고 가정하면(Allan 등 1986), Bloch 함수는 단위세포를 주기로 하여 급격히 변하는 함수이지만, 포락함수는 단위세포에 비해 매우 천천히 변하는 함수가 된다. 따라서 Bloch 함수 $U^s(\mathbf{r})$ 는 단위 세포에서, 포락함수 $F_\lambda(\mathbf{r})$ 는 결정에서 각각

$$\int_C U^{s*}(\mathbf{r}) U^s(\mathbf{r}) d^3r = \delta_{s,s'} \quad (2.14)$$

$$\int_\Omega F_\lambda^*(\mathbf{r}) F_{\lambda'}(\mathbf{r}) d^3r = \delta_{\lambda,\lambda'} = \delta_{N,N'} \delta_{k_x,k_x'} \delta_{k_z,k_z'} \quad (2.15)$$

와 같이 규격화 된다. 여기서 C 은 단위세포의 체적이고, $\Omega(=L_x L_y L_z)$ 는 실공간에서 결정의 체적을 의미한다. 식 (2.8)의 첫째항은 자기장하에서 양자화된 운동에너지를 나타내고, 반면에 둘째와 세째항은 각각 강한 전기장하에서 전자 운동에서

발생하는 위치에너지와 운동에너지를 나타낸다. 식 (2.2)의 단일 전자 해밀토니안에서 전기장이 포함되는 효과는 에너지 스펙트럼의 k_y 의 축퇴를 제거하는 역할을 하게 되고, 식 (2.3)에서 처럼 중심위치를 이동하게 한다는 것을 주목하여야 한다. 자기전도도가 식 (2.8)에 주어지는 단일 전자의 고유치를 포함하므로 전기장의 함수가 됨을 쉽게 볼 수 있는데 상세한 기술은 다음 장에서 하기로 한다.



III. 이완함수와 관련된 비선형 자기 전도도

이 장에서는 식 (2.7)과 식 (2.8)을 사용하여 내부 충돌장 효과를 나타내는 이완함수와 관련된 비선형 자기 전도도를 구하기로 한다. 계에 외부장인 정전기장과 정자기장이 작용할 때 직류 비선형 자기 전도도 텐서의 일반적 형태(Ryu와 Choi, 1991)는

$$\sigma_{kl}(E) = \frac{\hbar}{\Omega} \sum_{\lambda} \sum_{\lambda'} \langle \lambda | j_l | \lambda' \rangle \langle \lambda' | j_k | \lambda \rangle \frac{f(\epsilon_{\lambda}) - f(\epsilon_{\lambda'})}{\epsilon_{\lambda} - \epsilon_{\lambda'}} \frac{\Gamma_{\lambda', \lambda}(E)}{(E_{\lambda} - E_{\lambda'} - \nabla_{\lambda', \lambda}(E))^2 + \Gamma_{\lambda', \lambda}^2(E)} \quad (3.1)$$

로 주어지는데 위의 식을 유도하기 위해서 포논이 열적 평형상태에 있다고 가정하였다. 여기서 $k, l = x, y, z$, E_l 은 전기장의 $l (= x, y, z)$ 성분이고, j_l 은 l 방향의 단일 전자 전류밀도 연산자를 나타내며, E_{λ} 은 양자수 λ 를 갖는 단일 전자의 에너지 고유치이고, $f(\epsilon_{\lambda})$ 는 식 (2.9)에 대응하는 전자의 에너지 고유치 ϵ_{λ} 에 대한 Fermi-Dirac 분포함수이다. ∇ 와 Γ 는 각각 전자의 자체에너지를 실수부와 허수부를 취하므로써 얻어지는 전기장과 자기장에 의존하는 스펙트럼의 선이동(line shift)과 선폭(line width)을 나타낸다(Suzuki, 1992). 이러한 물리량은 강한 전기장하에서 전기장의 함수로 주어지므로 산란과정에서의 내부 충돌장 효과를 가지게 되지만 만약 전기장의 세기가 약한 경우에는 산란과정에서 내부 충돌장 효과는 없어지고 ∇ 와 Γ 는 각각 전기장의 세기와 무관한 스펙트럼의 선이동과 선폭이 된다. 산란과정의 내부 충돌장 효과에 기인한 ∇ 와 Γ 은 각각 단일 전자의 두 Landau 준위 에너지 간격 $\hbar \omega_s (= E_{\lambda+1} - E_{\lambda})$ 보다 매우 작다고 가정하고, 앞 장에서 구한 단일 전자의 고유함수와 에너지 고유치를 식 (3.1)에 대입하여 정리하면

$$\sigma_{yy}(E) \cong \frac{\hbar}{\Omega} \sum_{\lambda_s} \sum_{\lambda'_s} |\langle \lambda_s | j_y | \lambda'_s \rangle|^2 \frac{f(\epsilon_{\lambda_s}^s) - f(\epsilon_{\lambda'_s}^s)}{\epsilon_{\lambda_s}^s - \epsilon_{\lambda'_s}^s} \frac{\Gamma_{\lambda'_s, \lambda_s}(E)}{(E_{\lambda_s}^s - E_{\lambda'_s}^s)^2} \quad (3.2)$$


와 같이 주어진다. 따라서 비선형 자기 전도도 $\sigma_{yy}(E)$ 는 강한 전기장하에서 전자와 포논사이의 충돌과정에 기인한 이완함수 $\Gamma_{\lambda'_s, \lambda_s}(E)$ 에 비례함을 알 수 있다. 식

(3.2)에 주어진 비선형 자기 전도도를 얻기 위해서는 단일 전자 전류밀도 연산자의 행렬요소와 이완함수 $\Gamma_{\lambda s', \lambda s}(E)$ 을 계산이 선행되어야 한다.

먼저, 식 (2.7)과 식 (2.13)을 사용하여 단일 전자 전류밀도 연산자의 행렬요소를 구하면

$$\begin{aligned}
 \langle \lambda s | j_y | \lambda' s' \rangle &= \langle N, k_x, k_z, s | (-e/m_t) p_y | N, k_x, k_z, s \rangle \\
 &= \int d_3 r [U_s(\mathbf{r}) F_\lambda^s(\mathbf{r})]^* ((-e/m_t) p_y) [U_{s'}(\mathbf{r}) F_{\lambda'}^{s'}(\mathbf{r})] \\
 &= \delta_{s's} \langle \lambda | (-e/m_t) p_y | \lambda' \rangle + \delta_{\lambda \lambda'} \langle s | (-e/m_t) p_y | s' \rangle \quad (3.3)
 \end{aligned}$$

과 같이 두 부분으로 나타낼 수 있고, δ 는 $U_s(\mathbf{r})$ 와 $F_\lambda(\mathbf{r})$ 의 규격화 조건에 기인한다. 식 (3.3)의 첫번째 항은 전자의 골짜기내 산란에 대한 선택률을 나타내고, 두번째 항은 골짜기간 산란의 선택률을 나타낸다. 그러므로 단일 전자 전류밀도 연산자의 행렬요소를 선택률에 따라 각각 골짜기간 산란과 골짜기내 산란에 대해서 계산하면


제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

$$|\langle \lambda s | j_y | \lambda' s' \rangle|^2 = \begin{cases} (e l_B^s \omega_s \sqrt{2})^2 [(N+1) \delta_{N, N+1} + N \delta_{N, N-1}] \delta_{k_x, k_x'} \delta_{k_z, k_z'} \delta_{s, s'} & \text{(골짜기내 산란)} \\ G(s, s') \delta_{\lambda, \lambda'} & \text{(골짜기간 산란)} \end{cases} \quad (3.4)$$

를 얻을 수 있다. 여기서 $G(s, s') = |\langle s | j_y | s' \rangle|^2$ 을 의미하고, $l_B^s = (\hbar / m \omega_s)^{1/2}$ 는 기저상태의 Landau 궤도반경을 의미하며, δ 기호(

$\delta_{N,N}, \delta_{k_s, k_s}, \delta_{k_s, k_s}, \delta_{s,s}$)는 선택률을 나타낸다.

다음에, 양자 상태 $|\lambda_1 s_1\rangle$ 와 $|\lambda_2 s_2\rangle$ 사이의 전이에 관련된 전기장에 의존하는 이완 함수 $\Gamma(E)$ 의 행렬 요소는 1차 Born 근사에서 일반적으로

$$\Gamma_{\lambda_2 s_2, \lambda_1 s_1}(E) = \pi \sum_{\pm} \sum_q (N_q(T) + 1/2 \pm 1/2) S_{\pm} \quad (3.5)$$

와 같이 주어진다(Ryu와 Choi, 1991). 여기서 T 는 포논의 온도이고, $N_q(T)$ 은 에너지가 $\hbar \omega_q$ 인 포논의 Bose-Einstein 분포함수이며, S_{\pm} 는

$$S_{\pm} = \sum_{\lambda_3 s_3} [|\langle \lambda_2 s_2 | \gamma_q^{\mp} | \lambda_3 s_3 \rangle|^2 \delta(E_{\lambda_3}^{s_3} - E_{\lambda_1}^{s_1} \pm \hbar \omega_q) + |\langle \lambda_3 s_3 | \gamma_q^{\pm} | \lambda_1 s_1 \rangle|^2 \delta(E_{\lambda_3}^{s_3} - E_{\lambda_2}^{s_2} \pm \hbar \omega_q)] \quad (3.6)$$

으로 주어진다. 식 (3.5)과 식 (3.6)를 얻기 위해서 일반화된 Langevin 운동방정식을 사용하여 전자와 포논간의 상호작용이 약하다는 가정을 하였다. 앞에서 거론되었듯이, 식 (2.7)과 식 (2.8)에 주어진 전자의 에너지 고유함수와 에너지고유치를 식 (3.6)에 적용하면 식 (3.5)의 이완함수는 전기장에 의존한다는 것을 쉽게 알 수 있다. 식 (3.6)의 $\sum_{\lambda_3 s_3}$ 는 s 골짜기에서의 $\sum_N \sum_{k_s} \sum_{k_s}$ 를 의미하고, 식 (3.6)의 δ 함수내에

서 \pm 는 산란과정에서의 포논의 방출과 흡수를 가리킨다. δ 함수는 전자가 한 양자 상태에서 다른 양자 상태로 전이가 일어날 때, 전기장 유도과정에 기인한 포논의 흡수와 방출과정에 대한 에너지 보존을 나타낸다. 이러한 에너지 보존식은 전자가 전기장으로 부터 에너지를 흡수하여 전이가 일어날 때 전자의 에너지 변화는 포논의 에너지와 같게 되고, 이것이 $\hbar \omega_s \gg \Gamma(E)$ 가 만족할 때, hot-electron 자기 포논 공명을 발생하게 한다. 만약 식(3.6)에서 전기장의 세기를 $E \rightarrow 0$ 로 취하면, 약한 전기장에 대한 정규 자기 포논 공명효과에서 일어나는 통상의 포논 흡수와 방출과정이 되고, 전기장에 의한 내부 충돌장 효과는 일어나지 않게 된다.

IV. Hot-electron 자기 포논 공명효과

이 장에서는 비등방 유효질량을 갖는 구조계에서 경사진 자기장과 강한 전기장하에서의 hot-electron 자기 포논 공명조건을 구하기로 한다.

식 (3.6)에서 주어진 전자와 포논간의 상호작용 연산자의 행렬요소는 식 (2.7)에 의해서

$$|\langle \lambda s | \gamma_q^\mp | \lambda' s' \rangle|^2 = |C(q)|^2 [|J_{NN}(u)|^2 \delta_{k, k' \pm q} \delta_{k, k' \pm q} \delta_{s, s'} + |F_{s'}(q)|^2 \delta_{\lambda \lambda'}] \quad (4.1)$$

로 주어진다. 여기서 $F_{s'}(q)$ 와 $|J_{NN}(u)|^2$ 는 각각

$$F_{s'}(q) = \langle s | \exp(\pm i q \cdot r) | s' \rangle \quad (4.2)$$

$$|J_{NN}(u)|^2 = \frac{N_n!}{N_m!} \exp(-u) u^{N_n - N_m} [L_{N_m}^{N_n - N_m}(u)]^2 \quad (4.3)$$

과 같이 정의되고, u 는

$$u = (l_B^2)^2 [q_y^2 + (m_d/m_s^* m_B^s)^2 (m_d q_z \sin \theta - m_d q_x \cos \theta)^2] \quad (4.4)$$

이고, $N_n = \min(N, N')$, $N_m = \max(N, N')$ 이며, $L_m^n(u)$ 는 연관 Laguerre 다항식이다(Gantsevich와 Ryzhik, 1965).

식 (2.8)의 단일 전자의 에너지 고유치와 식 (4.1)의 전자와 포논간의 상호작용 연산자의 행렬요소를 식 (3.6)에 대입하여 계산하면,

$$S_{\pm}^{intra} \approx (2/\hbar) |C(q)|^2 \sum_{l'=1}^{\infty} |J_{NN+l'}(u)|^2 \delta(P\omega_s - \omega_q^*) \quad (\text{골짜기내 산란}) \quad (4.5)$$

$$S_{\pm}^{intr} \approx 2 |C(q)|^2 \sum_s \left(\sum_{N \neq N'} |J_{NN'}(it)|^2 + \sum_N |F_{s^{\pm}}(q)|^2 \delta_{NN} \right) \\ \times \delta \left[(N+1/2) \hbar \omega_s - (N+1/2) \hbar \omega_s + (m_s m_l V_d^2 / 2) (1/m_B^s - 1/m_B^s) \pm \hbar \omega_q^{\pm} \right]$$

(골짜기간 산란) (4.6)

과 같이 근사적으로 골짜기내 산란과 골짜기간 산란으로 나눌 수 있다. 식 (4.5)과 식 (4.6)에 주어지는 물리량은 각각

$$\omega_q^* = \omega_q + eEl_{B_0}^s / \hbar, \quad (4.7)$$

$$B_0 = m_s^* \omega_q / e, \quad (4.8)$$

$$\omega_q^{\pm} = \omega_q \pm eE \overline{l_{B_0}^s} / \hbar, \quad (4.9)$$

$$B_0 = (2\omega_L / e) |1/m_s^* - 1/m_s^*|, \quad (4.10)$$

$$l_{B_0}^s \approx [\hbar m_s \omega_q]^{1/2}, \quad (4.11)$$

$$\overline{l_{B_0}^s} \approx (\sqrt{\hbar / m_s} e B_0 / 2) (\sqrt{m_s^*} + \sqrt{m_s^*}), \quad (4.12)$$

이고, P 는 양의 정수이다. 식 (4.5)와 식 (4.6)을 얻기위해서 다음의 근사식

$$y_{\lambda}^s - y_{\lambda'}^s \approx l_{B_0}^s (l_{B_0}^s + l_{B_0}^s) / 2 \quad (4.13)$$

$$y_{\lambda}^s - y_{\lambda'}^s \approx \overline{l_{B_0}^s} = (l_{B_0}^s + l_{B_0}^s) / 2 \quad (4.14)$$

를 사용하였고, 또한 δ 함수의 값을 해석적으로 계산하기 매우 어렵기 때문에 δ

함수의 Taylor 급수 전개식

$$\delta(x+a) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (a/x)^n \delta(x) \approx \delta(x) \quad (\text{for } x \gg a) \quad (4.15)$$

를 이용하였다. 따라서 비선형 자기 전도도의 hot-electron 자기 포논 공명조건을 식 (3.2), 식 (3.5), 식 (4.5), 식 (4.6)으로부터

$$P\omega_s = \omega_q^* \quad (\text{골짜기내 산란}) \quad (4.16)$$

$$(N+1/2)\hbar\omega_s = (N'+1/2)\hbar\omega_s + (m_i m_l V_d^2/2)(1/m_B^s - 1/m_B^s) \pm \hbar\omega_q^{\pm} \quad (\text{골짜기간 산란}) \quad (4.17)$$

과 같이 얻을 수 있다. 식 (4.16)과 식 (4.17)에서 볼 수 있는 것 처럼, 전도 전자와 포논간의 골짜기간 산란에서 hot-electron 자기 포논 공명조건은 전도 전자의 처음 상태와 나중 상태사이의 유효질량 차이와 전기장의 세기에 강하게 의존하지만, 골짜기내 산란에서의 hot-electron 자기 포논 공명조건은 유효질량에는 무관하고 전기장 세기에 따라 공명 파이크의 위치가 이동함을 알 수 있다. 만약 식 (4.16)과 식 (4.17)에서 주어진 hot-electron 자기 포논 공명조건에서 전기장의 세기를 $E \rightarrow 0$ 로 극한을 취하면 정류 자기 포논 공명조건이 되고, 특히 식 (4.17)의 hot-electron 자기 포논 공명조건에서 $E \rightarrow 0$ 극한에 대한 결과는 Futagawa 등(1993)이 이론적으로 구한 결과와 동일하다는 것을 알 수 있다.

V. 수치계산

이 장에서는 앞 장에서 구한 골짜기내 산란과 골짜기간 산란에 대한 hot-electron 자기 포논 공명조건을 포논 방출과정에 대해서 비등방 유효질량을 갖는 n형 게르마늄에 적용하여 수치계산을 하기로 한다. 운동량 보존과 에너지 보존에 의해서 n형 게르마늄의 전자의 골짜기내 산란과 골짜기간 산란은 각각 Γ 와 X 점에 있는 포논만 허용하므로 (Payne, 1965), 가능한 포논(Nilsson와 Nelin, 1971)은 Γ 점[$LO - TO$ (37.7 meV)], X_4 점[TO (34.2 meV)], X_3 점[TA (9.93 meV)], 그리고 X_1 점 [$LA - LO$ (29.8 meV)]이 된다(부록 (2A) 참조). 그림을 보다 간단히 하기 위해서 전기장의 세기를 각각 0 kV/cm, 1 kV/cm, 10 kV/cm값을 취하고 수치계산을 하였다(부록 (3) 참조).

그림 1은 자기장의 방향이 $B \parallel \langle 110 \rangle$ 일 때, 초기 골짜기에서의 전자의 유효질량 m_s^* 가 0.099 m 이고, 나중 골짜기에서의 전자의 유효질량 m_s^* 가 X 점에 대해서는 0.36 m , Γ 점에 대해서는 0.099 m 으로 주어지는 경우에 대한 hot-electron 자기 포논 공명 피크 위치를 에너지와 자기장에 대해서 나타낸 것이다. 실선은 초기 골짜기에서의 전자의 Landau 에너지 준위를 가리키고, 파선은 전자가 포논을 방출하여 나중 골짜기로 산란했을 때의 Landau 지수에 따른 에너지 상태를 의미한다. 여기서 주목할 점은 X 점에서는 초기 골짜기의 유효질량과 나중 골짜기의 유효질량이 서로 다르고 Γ 점에서는 처음과 나중 골짜기의 유효질량이 같으므로 X 점에서는 처음과 나중 골짜기간의 유효질량 차이로 인해서 골짜기간 산란에 기인한 자기 포논 공명이 일어나고, Γ 점에서는 처음과 나중 골짜기간의 유효질량 차이가 없기 때문에 골짜기내 산란에 기인한 자기 포논 공명이 일어나게 된다. 실선과 파선의 교차점은 자기 포논 공명 피크 위치를 나타내는데 전기장의 세기가 0 kV/cm일 때는 Futagawa 등의 이론 (Futagawa 등 1993)과 동일하고, 전기장의 세기가 증가함에 따라 공명 피크의 위치가 이동함을 알 수 있는데 이것은 Futagawa 등의 실험 결과(Futagawa 등 1993)와 잘 일치한다.

그림 2는 자기장의 방향이 $B \parallel \langle 111 \rangle$ 일 때, 초기 골짜기에서의 전자의 유효질량 m_s^* 가 0.082 m 이고, 나중 골짜기에서의 전자의 유효질량 m_s^* 가 X 점에 대해서

는 $0.207m$, Γ 점에 대해서는 $0.082m$ 에 대한 hot-electron 자기 포논 공명 피크 위치를 에너지와 자기장에 대해서 나타낸 것이다. 실선은 초기 골짜기에서의 전자의 Landau 에너지 준위를 가리키고, 파선은 전자가 포논을 방출하여 나중 골짜기로 산란했을 때의 Landau 지수에 따른 에너지상태를 의미한다. 자기장의 방향이 $B \parallel \langle 110 \rangle$ 일 때와 마찬가지로 X 점에서는 처음과 나중 골짜기간의 유효질량 차이로 인해서 골짜기간 산란에 기인한 공명이 일어나고, Γ 점에서는 처음과 나중 골짜기간의 유효질량 차이가 없기 때문에 골짜기내 산란에 기인한 자기 포논 공명이 일어난다. 그리고 전기장의 세기가 0 kV/cm 일 때 hot-electron 자기 포논 공명 피크 위치는 Futagawa 등의 이론과 동일하고, 전기장의 세기가 증가함에 따라 공명 피크의 위치가 이동하는데 이것은 Futagawa 등(1993)의 실험 결과와 잘 일치한다.

그림 3은 자기장 방향이 $B \parallel \langle 100 \rangle$ 일 때, 처음과 나중 골짜기에서 전자의 유효질량 m_s^* 가 모두 $0.135m$ 으로 주어지는 경우에 대한 hot-electron 자기 포논 공명 피크 위치를 에너지와 자기장에 대해서 나타낸 것이다. 실선은 초기 골짜기에서의 전자의 Landau 에너지 준위를 가리키고, 파선은 전자가 포논을 방출하여 나중 골짜기로 산란했을 때의 Landau 지수에 따른 에너지상태를 의미한다. 이론적으로는 모든 골짜기에서 유효질량이 같기 때문에 X 점과 Γ 점에서 골짜기간 산란으로 기인하는 자기 포논 공명효과는 발생하지 않고, Γ 점에서 골짜기내 산란으로 기인하는 자기 포논 공명만 나타나리라 기대된다. 그러나 Futagawa 등(1993)의 실험 결과에 따르면, 골짜기내 산란으로 기인한 자기 포논 공명과 골짜기간 산란으로 기인한 자기 포논 공명효과가 관찰되지 않았는데, 골짜기간 산란으로 기인한 자기 포논 공명은 처음과 나중 골짜기간의 유효질량이 동일하므로 나타나지 않지만, 골짜기내 산란으로 기인한 자기 포논 공명이 일어나지 않는 이유는 현재까지 명확하지 않다. 이러한 이유는 Futagawa 등이 지적한 바와 같이 골짜기내와 골짜기간 산란의 어떤 상관에 기인한 것으로 판단된다. 또한 전기장의 세기가 0 kV/cm 일 때 hot-electron 자기 포논 공명 피크 위치는 Futagawa 등의 이론과 동일하고, 전기장의 세기가 증가함에 따라 공명 피크의 위치가 이동함을 알 수 있다.

그림 1, 2, 3에서 보는 바와 같이 hot-electron 자기 포논 공명 피크의 위치는 전자의 처음 상태와 나중 상태 사이의 유효질량 차이와 전기장의 세기에 밀접하게 관련이 있음을 알 수 있고, 또한 공명 피크 위치는 전기장의 세기가 증가함에 따라 더 강한 자기장 쪽으로 이동한다는 것을 알 수 있다.

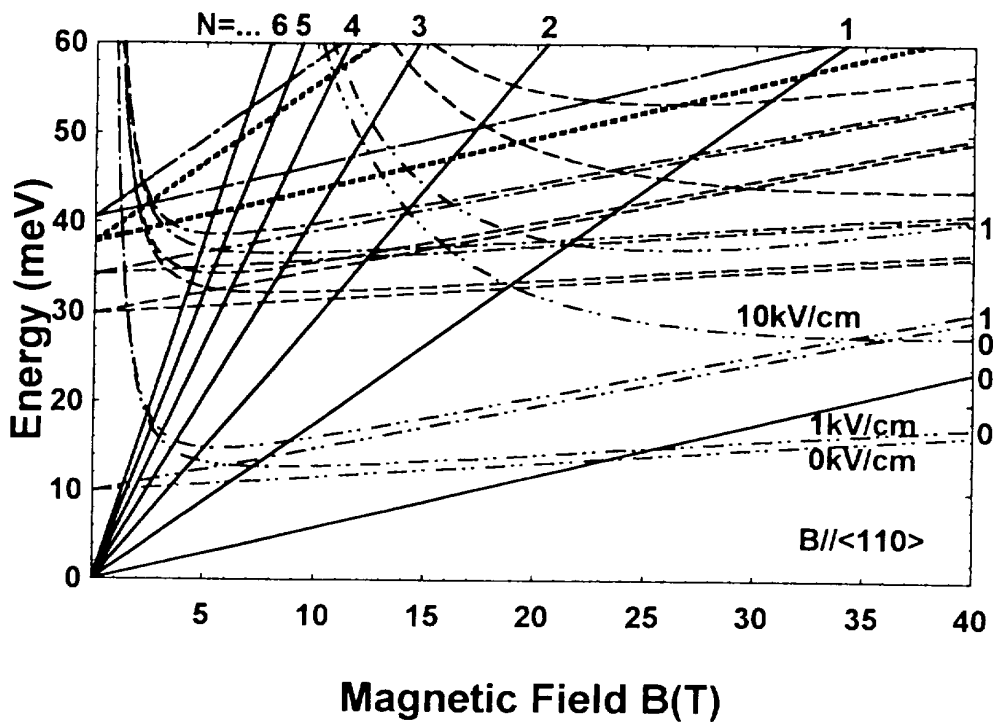


Fig.1 Energy diagram of n-Ge for $B \parallel \langle 110 \rangle$. The quantum number of the Landau level is indicated for each line. The dash-double dotted, dashed, dash-dotted, and dotted line are, respectively, for X_3 -point, X_1 -point, X_4 -point, and Γ -point, depending on the strength of the electric field given by 0 kV/cm, 1 kV/cm, and 10 kV/cm. The solid and dotted lines and another lines are for $m_{s_i}^* = 0.099m$ and $m_{s_i}^* = 0.36m$, respectively. The result at 0 kV/cm agrees with the theoretical values of Futagawa et al. However, as the electric field is increased, the present theory gives the better results for the different Landau levels.

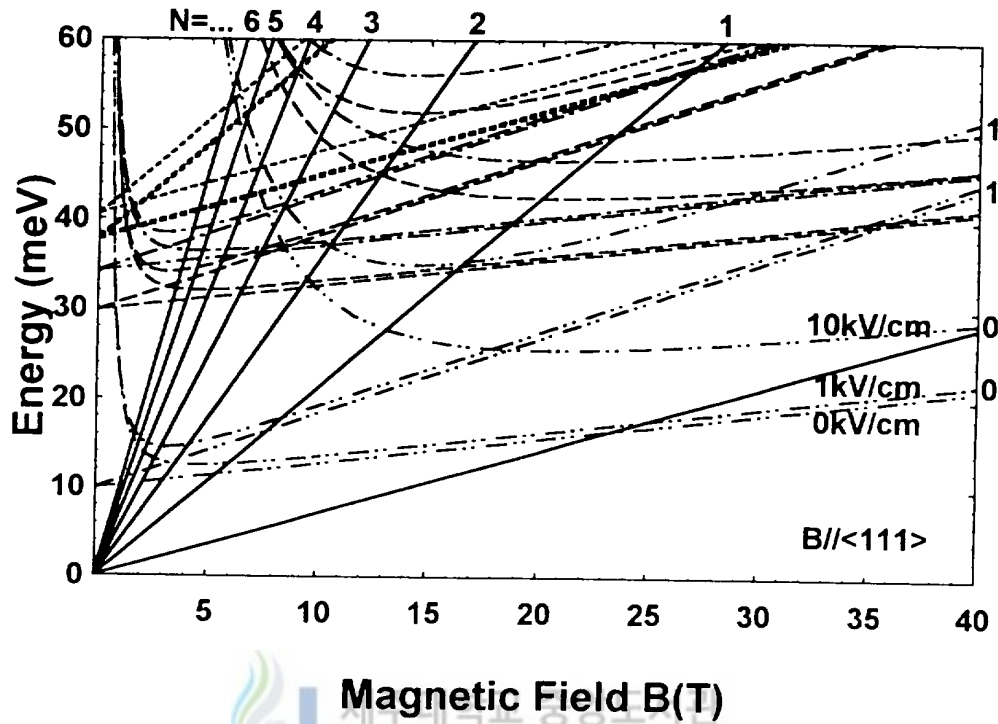


Fig.2. Energy diagram of n-Ge for $B \parallel \langle 111 \rangle$. The quantum number of the Landau level is indicated for each line. The dash-double dotted, dashed, dash-dotted, and dotted line are, respectively, for X_3 -point, X_1 -point, X_4 -point, and Γ -point, depending on the strength of the electric field given by 0 kV/cm, 1 kV/cm, and 10 kV/cm. The solid and dotted lines and another lines are for $m_{s_i}^* = 0.082m$ and $m_{s_j}^* = 0.207m$, respectively. Comparison with the theoretical values of Futagawa et al. is the same as that in Fig.1.

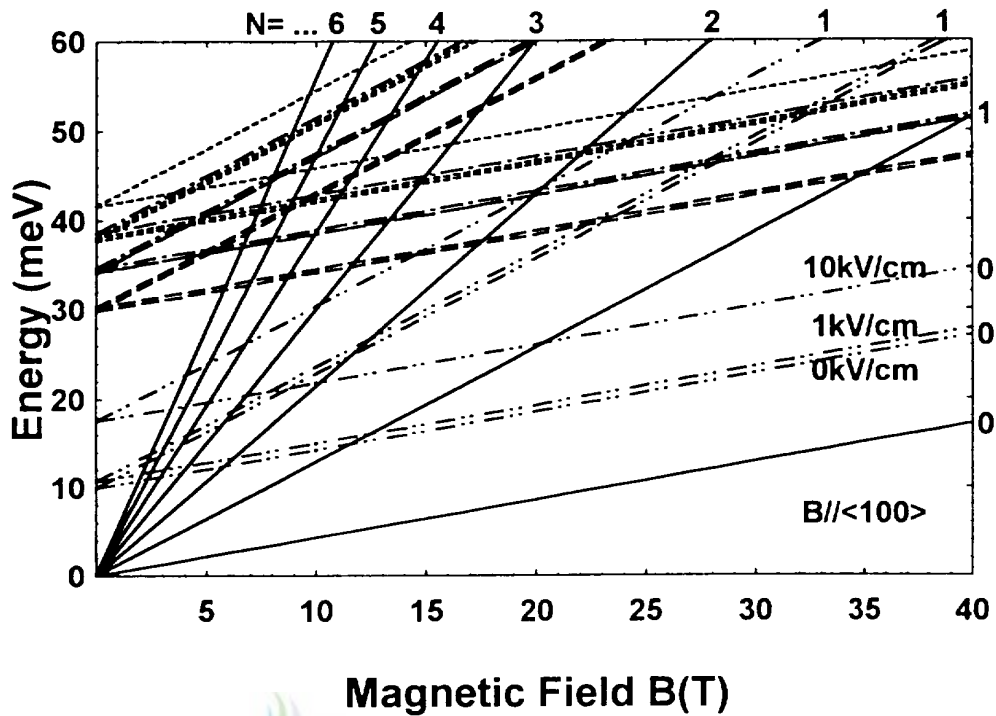


Fig.3. Energy diagram of n-Ge for $B \parallel \langle 100 \rangle$. The quantum number of the Landau level for $m_s^* = 0.135m$ is indicated for each line. The dash--double dotted, dashed, dash-dotted, and dotted line are, respectively, for X_3 -point, X_1 -point, X_4 -point, and Γ -point, depending on the strength of the electric field given by 0 kV/cm, 1 kV/cm, and 10 kV/cm. The result at 0 kV/cm agrees with the theoretical values of Futagawa et al. Note that, according to Futagawa et al.'s experimental results, neither intervalley nor intravalley MPR is observed for $B \parallel \langle 100 \rangle$.

VI. 결 론

지금까지 본 논문에서 강한 전기장하에서의 양자 통계 수송이론 (Ryu와 Choi, 1991)을 사용하여 많은 골짜기 구조를 갖는 물질계에 정사진 자기장 $\mathbf{B} = B(\sin\theta, 0, \cos\theta)$ 와 강한 전기장 $\mathbf{E} = E\hat{y}$ 이 작용하는 경우에 대한 비선형 자기전도도 $\sigma_{yy}(E)$ 를 도출하여 이것으로부터 식 (4.16)과 식 (4.17)에 주어진 골짜기내 산란과 골짜기간 산란에 기인하는 hot-electron 자기 포논 공명조건을 제시하였고 이것을 n형 게르마늄에 적용하였다.

n형 게르마늄에 자기장 방향이 $\mathbf{B} \parallel \langle 110 \rangle$ 와 $\mathbf{B} \parallel \langle 111 \rangle$ 으로 작용하는 경우에서 X점에서는 처음과 나중 골짜기간의 유효질량 차이로 인해서 골짜기간 산란에 기인하는 hot-electron 자기 포논 공명현상은 일어나지만, Γ 점에서는 처음과 나중 골짜기간의 유효 질량 차이가 없기 때문에 골짜기내 산란에 기인하는 공명현상이 일어나게 되고 공명 피크 위치는 전기장의 세기가 증가함에 따라 더 강한 자기장 쪽으로 이동함을 알 수 있다. 자기장 방향이 $\mathbf{B} \parallel \langle 100 \rangle$ 으로 작용하는 경우, X점과 Γ 점에서 처음과 나중 골짜기간의 유효 질량 차이가 없기 때문에 골짜기간 산란으로 기인한 hot-electron 자기 포논 공명효과는 나타나지 않고 골짜기내 산란만 나타나리라 기대된다. 그러나 Futagawa 등(1993)의 실험 결과에 따르면, 골짜기내 산란과 골짜기간 산란에 기인한 공명 피크가 관찰되지 않았는데, 골짜기간 산란으로 기인한 공명 피크가 일어나지 않는 이유는 처음과 나중 골짜기간의 유효질량이 동일하므로 발생하지 않은 것으로 판단되지만 골짜기내 산란으로 기인한 공명 피크가 일어나지 않는 이유는 현재까지 명확하지 않으므로 이에 대한 연구가 좀 더 이루어져야 되리라 기대된다.

식 (4.16)과 식 (4.17)에 주어진 골짜기내 산란과 골짜기간 산란에 대한 hot-electron 자기 포논 공명조건을 얻기 위하여 비선형 응답이론에서 얻어진 비선형 자기전도도 텐서 $\sigma_{kk}(E_i)$ 에 포논이 열적 평형상태이고, 산란과정의 내부 충돌장 효과에 기인한 선이동과 이완함수가 각각 단일 전자의 두 Landau 준위 에너지 간격 $\hbar\omega_s(=E_{\lambda+1}-E_{\lambda})$ 보다 매우 작다고 가정하였다. 또한 산란과정의 내부 충돌장

효과를 나타내는 이완함수에 포함된 δ 함수 내에서 $y_{\lambda}^s - y_{\lambda'}^s \simeq l_{B_0}^s (l_{B_0}^s + l_{B_0'}^s) / 2$ 와 $y_{\lambda}^s - y_{\lambda'}^s \simeq \overline{l_{B_0}^s} = (l_{B_0}^s + l_{B_0'}^s) / 2$ 으로 근사하고, a 가 매우 작다는 조건하에서 $\delta(x+a) \approx \delta(x)$ 와 같이 근사를 하였다. 만약 식(4.16)과 식(4.17)에 주어진 hot-electron 자기 포논 공명조건에서 전기장의 세기를 $E \rightarrow 0$ 로 극한을 취하면 정규 자기 포논 공명조건이 되는데 특히, 식 (4.17)의 골짜기간 정규 자기 포논 공명조건은 Futagawa 등(1993)이 이론적으로 제시한 hot-electron 자기 포논 공명조건과 동일함을 알 수 있었다.

본 논문에서는 hot-electron 자기 포논 공명조건을 구하는 것에 관심을 두었기 때문에 비선형 자기진도도의 진폭 계산은 앞으로의 연구 과제로 남겨두기로 한다.



VII. 참고문헌

- Allan, G., G. Bastard, N. Boccara, M. Lannoo and M. Voos, 1986, *Heterojunctions and Semiconductor Superlattices*, Springer-Verlag, Berlin, pp.
- Barker, J. R., 1973. *J. Phys. C* **6**, 20663.
- Eaves, L., P. S. S. Guimaraes, J. C. Portal, T. P. Persall and G. Hill. 1984. *Phys. Rev. Lett.* **52**, 608.
- Eaves, L., R. A. Houl, R. A. Stradling, R. J. Tidley, J. C. Portal and S. Askenazy. 1975. *J. Phys. C* **8**, 1034.
- Futagawa, H., N. Miura, K. Yamada, N. Kamata, A. Kowata and C. Hamaguchi. 1993. *J. Phys. Soc. Jpn.* **62**, 4407.
- Gantsevich, S. V and V. L. Gurevich. 1969. *Sov. Phys. Semicond.* **2**, 932.
- Gradshteyn, I. S and I. M. Ryzhik. 1965. *Table of Integrals, Series, and Products*, Academic, New York, pp.
- Hamaguchi, C., Y. Hirose and K. Shimomae. 1983. *Japan. J. Appl. Phys.* **22**, 190.
- Hirose, Y., T. Tsukahara and C. Hamaguchi. 1983. *J. Phys. Soc. Jpn.* **52**, 4291
- Instone T, L. Eaves, J. C. Portal, C. Houlbert, P. Perrier, and S. Askenazy. 1977. *J. Phys. C* **10**, L585
- Kamata, N., H. Futagawa, K. Yamada, N. Miura and C. Hamaguchi. 1992. *Semicond. Sci. Technol.* **B 39**, 7.
- Nicholas, R., 1985. *J. Prog. Quant. Electr.* **10**, 1.
- Nilsson, G. and G. Nelin. 1971. *Phys. Rev. B* **3**, 364.
- Payling, C. A., P. S. S. Guimaraes, L. Eaves, B. R. Snell, J. C. Portal, M. A. de Forte-Poisson, C. Brylinski, G. Hill and M. A. Pate. 1986. *Supperlattices and Microstructures* **2**, 415.
- Payne, R. T., 1965. *Phys. Rev.* **139**, A570.
- Portal, J. C., L. Eaves, S. Askenazy, and R. A. Stradling. 1974. *Solid State Commun.* **14**, 1241.

Ryu, J. Y. and S. D. Choi. 1991. *Phys. Rev. B* **44**, 11328.

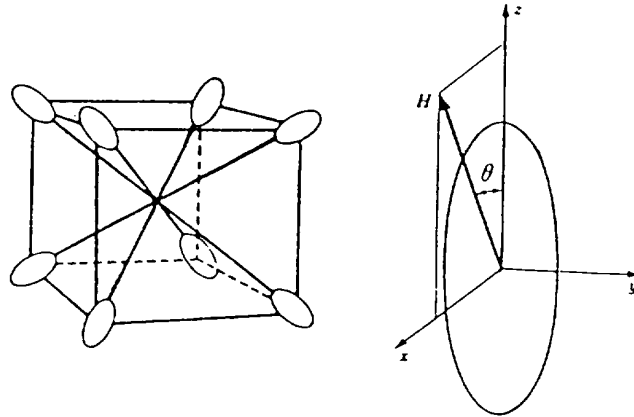
Suzuki, A., 1992. *Phys. Rev. B* **45**, 6731.

Yamada, K., N. Miura, N. Kamata and H. Futagawa. 1992. *Physica B* **177**,
461.



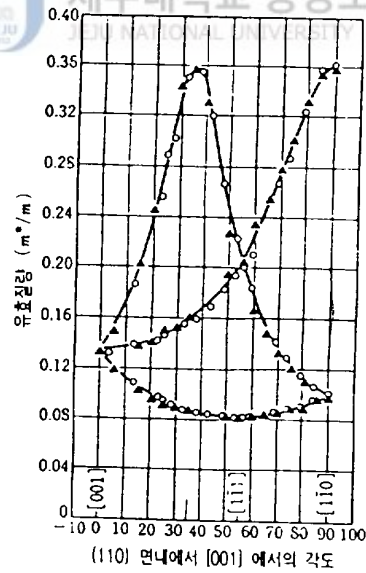
VIII. 부 록

부록(1A) : 게르마늄의 전도대의 에너지면과 z 방향으로 주축을 갖는 타원체 에너지면과 자기장

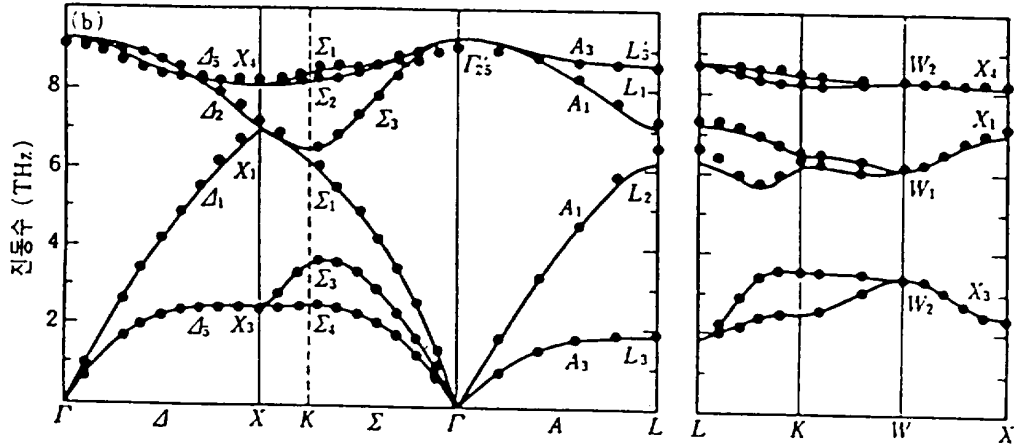


부록(1B) : 게르마늄의 사이클로트론 공명에 의한 유효질량 ($m_l = 1.58m$,

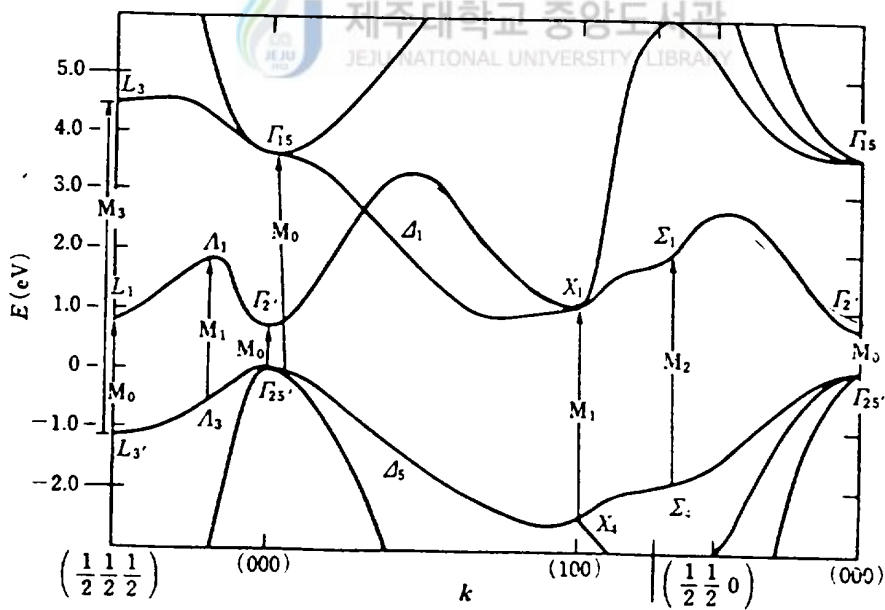
$$m_t = 0.082m)$$



부록(2A) : 확장된 결합 전하 모델에 의한 Ge의 포논 분산관계 (실선은 이론결과, 점은 측정치)



부록(2B) : 슈도퍼텐셜로 계산된 Ge의 에너지 밴드



부록 (3) : 수치해석에 사용된 메스메티카 프로그램

```

hb=1.054*10^(-34)(*플랑크 상수*)
e=1.6*10^(-19)(*전자의 전하*)
m=9.1*10^(-31)(*전자의 질량*)
mt=0.082*m(*세로 유효 질량*)
mci=0.099*m(*B//<110>;처음 사이클로트론 질량*)
mcf=0.360*m(*B//<110>;나중 사이클로트론 질량*)
f[B_]=Table[{{(n+1/2)hb*e*B/mci}/(1.6*10^(-22))},{n,0,6}]
p1=Plot[Evaluate[f[B]],{B,0,40},Frame->True, GridLines->Automatic,
PlotRange->{0,60}, PlotStyle->{AbsoluteThickness[1], AxesOrigin->{0,0} ]
ba={2*9.93*1.6*10^(-22)*mci*mcf/(mcf-mci)}/(e*hb)
L=(1/2 )*((hb/(mt*e*ba))^(1/2)) *((mci)^(1/2)+(mcf)^(1/2))/Simplify
j1=Table[{{(n+1/2)hb*e*B/mcf -1/(2*mt)} ((mci)^2-(mcf)^2)x^2/B^2+
e*x*L} /(1.6*10^(-22))+9.93,{n,0,1}}/.x->0 (*B//<110>,electric field 0V/cm,x3*)
j2=Table[{{(n+1/2)hb*e*B/mcf-1/(2*mt)}((mci)^2-(mcf)^2)y^2/B^2+e*y*L}
/(1.6*10^(-22))+9.93,{n,0,1}}/.y->100000 (*B//<110>,electric field 1000V/cm,x3*)
j3=Table[{{(n+1/2)hb*e*B/mcf-1/(2*mt)}((mci)^2-(mcf)^2)z^2/B^2+e*z*L}
/(1.6*10^(-22))+9.93,{n,0,1}}/.z->1000000(*B//<110>,electric field 10000V/cm,x3*)
p2=Plot[Evaluate[j1],{B,0.01,40},Frame->True,GridLines->Automatic,
PlotRange->{0,60},
PlotStyle->{{AbsoluteThickness[1], AbsoluteDashing[{7,3,0.5,3,0.5,5}]},
{AbsoluteThickness[1], AbsoluteDashing[{7,3,0.5,3,0.5,5}]},
{AbsoluteThickness[1], AbsoluteDashing[{7,3,0.5,3,0.5,5]}}}
](*B//<110>,electric field 0V/cm,x3*)
p3=Plot[Evaluate[j2],{B,0.01,40},Frame->True, GridLines->Automatic,
PlotRange->{0,60},
PlotStyle->{{AbsoluteThickness[1], AbsoluteDashing[{7,3,0.5,3,0.5,5}]},
{AbsoluteThickness[1], AbsoluteDashing[{7,3,0.5,3,0.5,5}]},
{AbsoluteThickness[1], AbsoluteDashing[{7,3,0.5,3,0.5,5]}}} ]

```

```

(*B//<110>,electric field 1000V/cm,x3*)
p4=Plot[Evaluate[j3],{B,0.01,40},Frame->True, GridLines->Automatic,
PlotRange->{0,60},
PlotStyle->{{AbsoluteThickness[1], AbsoluteDashing[{7,3,0.5,3,0.5,5}]},
{AbsoluteThickness[1], AbsoluteDashing[{7,3,0.5,3,0.5,5}]},
{AbsoluteThickness[1], AbsoluteDashing[{7,3,0.5,3,0.5,5}]}} ]
(*B//<110>,electric field 10000V/cm,x3*)
p5=Show[p2,p3 , AxesOrigin->{0,0}, PlotRange->{{0,40},{0,60}}]
(*B//<110>,electric field,0,1000V/cm, ,9.93mv,x3*)
ba=(2*29.8*1.6*10^(-22)*mci*mcf/(mcf-mci))/(e*hb)
L=(1/2 )*((hb/(mt*e*ba))^(1/2)) *((mci)^(1/2)+(mcf)^(1/2))/Simplify
j4=Table[{(n+1/2)hb*e*B/mcf-1/(2*mt)((mci)^2-(mcf)^2)x^2/B^2+e*x*L}
/(1.6*10^(-22))+29.8,{n,0,1}]/.x->0(*B//<110>,electric field 0V/cm,x1*)
j5=Table[{(n+1/2)hb*e*B/mcf-1/(2*mt)((mci)^2-(mcf)^2)y^2/B^2+e*y*L}
/(1.6*10^(-22))+29.8,{n,0,1}]/.y->100000(*B//<110>,electric field 1000V/cm,x1*)
j6=Table[{(n+1/2)hb*e*B/mcf-1/(2*mt)((mci)^2-(mcf)^2)z^2/B^2+e*z*L}
/(1.6*10^(-22))+29.8,{n,0,1}]/.z->1000000(*B//<110>,electric field 10000V/cm,x1*)
p6=Plot[Evaluate[j4],{B,0.01,40},Frame->True, GridLines->Automatic,
PlotRange->{0,60},
PlotStyle->{{AbsoluteThickness[1],AbsoluteDashing[{6,3}]},
{AbsoluteThickness[1],AbsoluteDashing[{6,3}]},
{AbsoluteThickness[1],AbsoluteDashing[{6,3}]}}]
(*B//<110>,electric field 0V/cm,29.8,x1*)
p7=Plot[Evaluate[j5],{B,0.01,40},Frame->True,GridLines->Automatic,
PlotRange->{0,60},
PlotStyle->{{AbsoluteThickness[1],AbsoluteDashing[{6,3}]},
{AbsoluteThickness[1],AbsoluteDashing[{6,3}]},
{AbsoluteThickness[1],AbsoluteDashing[{6,3}]}}]
(*B//<110>,electric field 1000V/cm,x1*)
p8=Plot[Evaluate[j6],{B,0.01,40},Frame->True, GridLines->Automatic,

```

```

PlotRange->{0,60},
PlotStyle->{{AbsoluteThickness[1],AbsoluteDashing[{6,3}]},
            {AbsoluteThickness[1],AbsoluteDashing[{6,3}]},
            {AbsoluteThickness[1],AbsoluteDashing[{6,3}]}}]
(*B//<110>,electric field 10000V/cm,x1*)
p9=Show[p6,p7 , AxesOrigin->{0,0}, PlotRange->{{0,40},{0,60}}
      ](*B//<110>,electric field,0,1000, V/cm,29.8mv,x1*)
bc={2*34.2*1.6*10^(-22)*mci*mc/(mc-mci)/(e*hb)
L=(1/2 )*((hb/(mt*e*bc))^(1/2)) *((mci)^(1/2)+(mc)^(1/2))//Simplify
j7=Table[{{(n+1/2)hb*e*B/mc-1/(2*mt)}{(mci)^2-(mc)^2}x^2/B^2+e*x*L}
          /(1.6*10^(-22))+34.2,{n,0,1}]/.x->0(*B//<110>,electric field 0V/cm,x4*)
j8=Table[{{(n+1/2)hb*e*B/mc-1/(2*mt)}{(mci)^2-(mc)^2}y^2/B^2+e*y*L}
          /(1.6*10^(-22))+34.2,{n,0,1}]/.y->100000(*B//<110>,electric field 1000V/cm,x4*)
j9=Table[{{(n+1/2)hb*e*B/mc-1/(2*mt)}{(mci)^2-(mc)^2}z^2/B^2+e*z*L}
          /(1.6*10^(-22))+34.2,{n,0,1}]/.z->1000000(*B//<110>,electric field 10000V/cm,x4*)
bd=37.7*1.6*10^(-22)*(mci/(e*hb)), L=((hb/(e*bc))^(1/2))
j10=Table[{{(n+1/2)hb*e*B/mci-1/(2*mt)}{(mci)^2-(mci)^2}x^2/B^2+e*x*L}
          /(1.6*10^(-22))+37.7,{n,0,1}]/.x->0(*B//<110>,electric field 0V/cm,ga*)
j11=Table[{{(n+1/2)hb*e*B/mci-1/(2*mt)}{(mci)^2-(mci)^2}y^2/B^2+e*y*L}
          /(1.6*10^(-22))+37.7,{n,0,1}]/.y->100000(*B//<110>,electric field 1000V/cm,ga*)
j12=Table[{{(n+1/2)hb*e*B/mci-1/(2*mt)}{(mci)^2-(mci)^2}z^2/B^2+e*z*L}
          /(1.6*10^(-22))+37.7,{n,0,1}]/.z->1000000(*B//<110>,electric field 10000V/cm,ga*)
p10=Plot[Evaluate[j10],{B,0.01,40},Frame->True, GridLines->Automatic,
         PlotRange->{0,60},
         PlotStyle->{{AbsoluteThickness[1],AbsoluteDashing[{2,2}]},
                     {AbsoluteThickness[1],AbsoluteDashing[{2,2}]},
                     {AbsoluteThickness[1],AbsoluteDashing[{2,2}]}}]
         (*B//<110>,ga, 0v/cm*)
p11=Plot[Evaluate[j12],{B,0.01,40},Frame->True, GridLines->Automatic,
         PlotRange->{0,60},

```

```

PlotStyle->{{AbsoluteThickness[1],AbsoluteDashing[{2,2}},
            {AbsoluteThickness[1],AbsoluteDashing[{2,2}},
            {AbsoluteThickness[1],AbsoluteDashing[{2,2}}]}
(*B//<110>,electric field 1000V/cm,ga*)
p13=Plot[Evaluate[j12],{B,0.01,40},Frame->True, GridLines->Automatic,
PlotRange->{0,60},
PlotStyle->{{AbsoluteThickness[1],AbsoluteDashing[{2,2}},
            {AbsoluteThickness[1],AbsoluteDashing[{2,2}},
            {AbsoluteThickness[1],AbsoluteDashing[{2,2}}]}
(*B//<110>,electric field 10000V/cm,ga*)
p16=Show[p13,p14 , AxesOrigin->{0,0}, PlotRange->{{0,40},{0,60}}
)(*B//<110>,electric field,0,1000,V/cm,34.28mv,x4*)
p17=Show[p10,p11 , AxesOrigin->{0,0}, PlotRange->{{0,40},{0,60}}
(*B//<110>,electricfield,0,1000,37.7mv,ga*)
t={ Text["0",{40,23.3},{-1.51,0}], Text["1",{34.1,60},{0,-1}],
    Text["2",{20.5,60},{0,-1}], Text["3",{14.6,60},{0,-1}],
    Text["4",{11.5,60},{0,-1}],
Text["5",{9.3,60},{0,-1}],
Text["N... 6",{6.5,60},{0,-1}], Text["0",{40,27.1},{-1.51,0}],
Text["1",{40,40},{-1.51,0}], Text["1",{40,30},{-1.51,0}],
Text["0",{40,17.1},{-1.51,0}], Text["B//<110>",{35,5},{0,0}],
Text["0kV/cm",{35,14},{0,0}], Text["1kV/cm",{35,18},{0,0}],
Text["10kV/cm",{32,30},{0,0}]
Show[p1,p5,p9,p16,p17, DefaultFont->{"Helvetica-Bold",12},
FrameLabel->{FontForm["Magnetic FieldB(T)", {"Helvetica-Bold",16}],
FontForm["Energy(meV)",{"Helvetica-Bold",16}],
FontForm["Fig.2", {"Helvetica-Bold",16}],""}, Epilog->t,
GridLines->None, AxesOrigin->{0,0}, PlotRange->{{0,40},{0,60}}
)(*B//<110>,electric field,0,1000,V/cm,*)

```