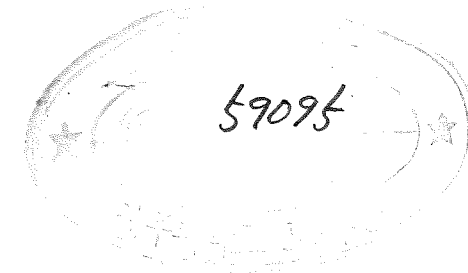


19
4.4.31
2024

碩士學位 請求論文

數值積分에 의한 定積分으로의 實驗的 接近

指導教授 金 鐵 洙



濟州大學校 教育大學院

數學教育專攻

左 昌 保

1997年 8月

數值積分에 의한 定積分으로의 實驗的 接近

指導教授 金 鐵 洙

이 論文을 碩士學位 請求論文으로 提出함

1997年 5月 日

濟州大學校 教育大學院 數學教育專攻

提出者 左 昌 保



左昌保의 教育學 碩士學位 論文을 認准함

1997年 7月 日

審査委員長

印

審査委員

印

審査委員

印

<초록>

수치적분에 의한 정적분으로의 실험적 접근

좌 창 보

제주대학교 교육대학원 수학교육전공

지도교수 김 철 수



본 논문에서는 고등학교 수학교육과정 가운데서 구분구적법에 의한 정적분의 도입에 대하여 수치적분에 의한 탐구와 관찰을 통한 새로운 방법으로서의 실험수학적 접근방법을 연구하였다.

제Ⅱ장에서는 수학교육에서의 컴퓨터 활용에 대하여 고찰하였고, 제Ⅲ장에서는 수치적분에 의한 적분의 근사계산에 대한 이론적 배경을 논하였으며, 제Ⅳ장에서는 컴퓨터 프로그램을 이용하여 수치적분의 여러 가지 방식의 비교 관찰과 곡선의 곡률과 수치적분과의 관계를 탐색하였다.

본 논문의 연구를 통하여 고등학교 수학교육의 현장에서 새로운 교수방법과 교육과정의 개선에 새로운 전환점을 모색하였다.

목 차

<초 록>

I. 서 론	1
II. 수학교육에서의 컴퓨터 활용	3
1. 대 수	3
2. 기 하	4
III. 이론적 배경	6
1. 적분법의 역사	6
2. Cauchy 적분	8
3. Riemann 적분	9
4. 적분의 근사계산	11
IV. 정적분의 근사계산	25
1. $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ 의 근사계산	25
2. $\int_1^2 e^x dx$ 의 근사계산	29
3. 곡선의 곡률과 수치적분의 고찰	32
4. 수학교실에서의 컴퓨터 활용	37
V. 결 론	43
참고문헌	44
<Abstract>	45



I. 서 론

현대 사회를 흔히 정보화 사회라 한다. 컴퓨터의 급속한 보급 및 이용으로 정보화의 물결은 산업 사회를 대체하고 있고, 더욱이 통신 매체와 결합된 컴퓨터의 위력은 나날이 그 힘을 발휘하여 손끝 하나로 수 많은 정보와 지식을 손쉽게 얻을 수 있는 시대를 열어 놓았으며, 인터넷의 활성화로 인해 시간적·공간적으로 제한을 거의 받지 않고 국내뿐 아니라 국제간에도 서로 정보를 검색하고 교환할 수 있게 되었다.

1980년대 이래 컴퓨터는 교육을 포함한 사회의 모든 영역에서 널리 사용되고 있다. 이제 컴퓨터 없이는 하루도 살아갈 수 없는 시대가 도래하고 있다. 새로운 프리젠테이션 도구들은 교육의 질과 환경을 엄청나게 바꿔 놓고 있다. 수학교육에서도 컴퓨터를 교수-학습 과정에 활용하려는 의지와 요구가 극대화되고 있고 실제로 수학이라는 교과목의 성격을 살펴볼 때, 컴퓨터 만큼 수학 학습의 과정을 풍요롭게 할 수 있는 교육매체도 드물다.

컴퓨터가 가지는 다양한 기능은 추상적인 수학 내용을 시각화하여 지도할 수 있을 뿐 아니라, 그 시각화가 학생들의 직접적인 경험이나 통제를 통해 이루어질 수 있다는 점에서 수학 학습의 어려움을 완화시켜 준다. 특히 형식적인 증명이나 개념 학습의 전 단계에서 그래픽이나 애니메이션, 시뮬레이션을 통한 직관적인 탐구적 활동은 수학의 역동적이고 발생적인 측면을 부각시킬 수 있다. 또, 산술적인 계산 뿐만 아니라 대수적 문자식의 변환도 신속히 처리될 수 있게 됨으로써 수학교육은 종래의 계산 기능 위주에서 사고력 배양 중심으로 옮겨갈 수 있게 된다.

또한, 컴퓨터 프로그램 활동은 오류수정의 기회를 통해 사고력 향상을 위한 기회로 사용될 수 있다. 오류는 예상하지 못한 곳에서 일어나기 때문에 학생들의 흥미를 끌 수 있으며 그 오류를 제거하기 위해 반드시 무엇을 할 수밖에 없기 때문에 자신의 행동에 대한 새로운 통찰로 이끌 수 있다.

수학은 매우 추상적인 학문이기 때문에 학생들에게 이해시키기 어려운

특성을 가지고 있다. 컴퓨터의 시각적·조작적 기능은 학생들로 하여금 추상과 구체의 만남을 통해 수학을 보다 쉽게 접근할 수 있게 해준다. 이러한 이유로 인하여 근래 많은 전문가들 사이에는 종이와 연필에만 의존하는 재래식 교육방법을 탈피하여 첨단기술을 수학 교육에 도입 함으로써 창의적이고 생동감 있는 도전이 과학기술 현장에 이용될 수 있는 것이 되도록 교과내용과 교육방법이 개혁하여야 한다는 시대적 요청이 꾸준히 제기되고 있다.

본 논문은 이러한 관점에서 입시 위주의 주입식 수학교육에서 탈피하여 수학교실에서 컴퓨터를 활용함으로써 탐구와 관찰이라는 실험적 활동을 통해 수학교육에 새로운 활력을 불어 넣고자 하는 데 그 목적을 갖는다. 이러한 목적에 즈음하여 현재 고등학교에서 다루는 정적분의 도입에 이용되는 구분구적법의 이론을 실험적인 방법을 통해 고찰해 봄으로써 학생들로 하여금 무한개념과 더불어 정적분의 개념을 이해하는 데 조금이나마 도움을 주고자 한다.

따라서, 본 논문에서는 제Ⅱ장에서 수학교육에서의 컴퓨터 활용을 다루고, 제Ⅲ장에서는 적분에 대한 이론적 배경을 수치해석적 적분의 근사계산을 중심으로 고찰해 보고, 제Ⅳ장에서는 수치적분을 응용한 프로그램을 활용하여 정적분값을 다각적인 경우에 따라 근사적으로 구하여 실제값과의 관계를 모색하고 이의 관찰을 통하여 학생들의 창의력 신장에 도움을 주고자 한다.

II. 수학교육에서의 컴퓨터 활용

현재 우리나라 수학 교육계에서는 학습 도구로서의 컴퓨터가 능률적이고 효과적인 학습환경을 제공하고 있다는 점을 인식하고 있지만 교사들이 실제로 현장에서 수학 교수-학습에 이를 활용할 수 있을 만한 교육환경이 마련되어 있지 못한 실정이다. 그 이유로는 많은 학교들이 각 교실에서 수업할 수 있는 컴퓨터를 확보하고 있지 못하다는 점과, 교사들이 사용할 수 있는 소프트웨어가 충분하지 못하다는 점이다. 따라서 수학 교사들이 공동으로 참여하고 교수-학습의 개선을 위해 노력할 수 있는 수학교실이 확보되어야 하며 이를 통해 실험적 수학학습이 이루어져야 한다. 한편, 수학교실에 인터넷이 연결되어 있다면, 인터넷을 통해 외국의 고등학교에서의 수학교실 활동의 자료를 신속히 얻을 수가 있어 수학활동을 통해 세계화에 일조할 수 있을 것이다.

수학교육에서 컴퓨터가 활용될 수 있는 분야는 광범위하고 다양하지만 대표적으로 대수와 기하를 들 수 있다. 이 두 부분에서의 컴퓨터 활용의 예를 소개하면 다음과 같다.

1. 대수

현재의 대수 교육은 복잡한 계산 기능을 지나치게 강조함으로써 개념 및 사고력 신장의 교육을 하지 못하고 있다. TK! solver와 muMath, SAM, Mathematica, Maple과 같은 기호조작 프로그램은 간단한 조작으로 방정식을 인수분해하고 방정식을 풀며 함수식의 그래프를 그려준다. 또한 Spreadsheet와 같은 응용프로그램은 행과 열로 구획 지워진 표내에서 산술적 계산이나 서열 매김 등 데이터 조작을 효율적으로 수행할 수 있다. 이들 소프트웨어는 그림, 방정식, 표, 그래프와 같은 다양한 표상 사이의 개념적 연결성을 시각적으로 보여줌으로써 한 표상에서의 변화가 다른 표상에 어떻게 영향을 미치는지를 용이하게 탐구할 수 있게 한다. 이러한 소프트웨

어를 수학교실에서 자유스럽게 이용할 수 있는 환경이 구축됨으로써 얻는 이점을 정리하면 다음과 같다.

첫째, 학생들의 대수적 변환 및 조작 기능을 길러 주는 데 소비하는 시간의 상당부분을 응용 중심으로 옮길 수 있다. 흔히 기능 지도를 축소함으로써 학생들의 개념 이해력과 문제 해결력이 저하될 것이라는 점을 우려하지만, 오히려 효과적인 기능 훈련이 가능하다면 심각한 문제가 아니라는 연구 결과가 많이 제기되고 있다.

둘째, 지도 계열을 개선함으로써 수학 학습에 대한 태도를 개선할 수 있다. 기능이나 개념을 먼저 지도한 후 응용문제를 접하게 하는 것이 아니라 응용문제를 먼저 소개할 수 있게 됨으로써 학생들로 하여금 학습하는 내용을 보다 의미있게 파악할 수 있게 해준다.

셋째, 역동적인 그래프로 양적인 관계를 산출해 내는 컴퓨터의 기능은 종래의 지필방법으로는 힘들었던 문자식이나 함수에 대한 직관력을 길러줄 수 있으며, 학습내용의 의미를 용이하게 파악시킬 수 있게 한다.

2. 기하

기하 영역에서 컴퓨터를 활용하는데 따른 이점을 정리하면 다음과 같다.

첫째, 종래의 지필 환경과는 다른 수업방법을 도입할 수 있다. 기하 개념을 지도하는 데 있어서 좀 더 직관적인 방법을 택할 수 있으며 추정하거나 탐구하는 활동에 초점을 둘 수 있다. 도형을 쉽고 정확하게 작도할 수 있고 마음대로 조작할 수 있는 Cabri Geometry, Congruence, GeoExplorer, Geometer's Sketchpad와 같은 프로그램을 이용하면, 개념적 이해나 추론을 하기 전에 기하학적 대상들 사이의 관계를 직관적으로 파악시킬 수 있다. 현재 기하교육은 공리나 정의로부터 기하학적 원리나 정리를 연역적으로 증명하는 과정에 주안점을 두고 있는데, 직관적인 탐구를 통하여 적절한 정리를 발견하고 형식화하며 가설을 설정하는 능력은 이를 증명하는 능력만큼 중요하다.

둘째, 지필 환경보다 논리적 사고력이나 문제해결 능력을 기르는 데 용이한 환경을 제공할 수 있다. ProofCheker와 같은 기하학적 증명에 대한 인공지능 프로그램이 개발됨에 따라 학생들이 컴퓨터와 대화를 해 나가면서 주어진 증명문제를 해결할 수 있고, 자신의 증명과정을 수정할 수 있게 함으로써 학생들의 수학적 능력을 신장시킬 수 있다.

셋째, 수학학습의 지도계열을 종래와 다르게 변화시킬 수 있다. 예를 들어 현재 고등학교에서 가르치는 변환기하를 조기에 쉽게 도입할 수 있다. 변환기하의 필수적인 개념은 매우 간단하지만, 변환의 합성을 소개할 때, 관련된 그림이 너무 많고 복잡한 계산이 필요하기 때문에 어렵게 느껴진다. 그 동안 기하시간에 변환기하를 도입하기 어려웠던 이유는 도형의 움직임을 구현하는 도구가 없었기 때문이다. 그래픽 소프트웨어를 사용하면 변환기하의 중심 아이디어(회전이동, 대칭이동, 평행이동, 닮은변환)를 시각적으로 쉽게 이해할 수 있게 하며 또, 복잡한 계산을 쉽게 할 수 있게 해주어서 주어진 둘레에 대한 가장 큰 넓이의 다각형을 구하는 문제나 복잡한 계산이 요구되는 Heron의 공식을 통한 다각형의 넓이 계산이 도입될 수 있다.

넷째, 적절한 소프트웨어를 이용하면 서로 다른과목(확률, 행렬, 극한 등)의 아이디어를 통합시킬 수 있다. 예를 들어, 변환기하가 도입되고 행렬의 곱을 쉽게 계산할 수 있게 됨에 따라 행렬의 함수적 의미를 쉽게 이해시킬 수 있으며 또한, 시뮬레이션 소프트웨어를 이용하면 도형의 넓이와 확률 사이의 관계를 탐구할 수 있는 것이다.

Ⅲ. 이론적 배경

1. 적분법의 역사

곡선으로 둘러싸인 넓이와 입체의 부피를 구하는 문제는 오랜 옛날부터 수학자들의 관심을 끌었다.

고대 그리스 수학자 안티폰(Antiphon; BC430년경)은 원에 내접하는 정다각형의 변의 수를 늘려감에 따라 원과 내접다각형의 넓이의 차가 점점 작아져서 마침내 그 차이가 없어진다고 생각한 소위 소모법(method of exhaustion)의 기초를 마련하였고 에우독도스(Eudoxos; 408-355B.C.)도 소모법에 관하여 연구하였으며 아르키메데스(Archimedes; 287-212B.C.)는 소모법을 완성하고 또, 그것을 응용하여 타원의 넓이, 회전체의 부피를 구하는 방법을 발견하였다.¹⁾

어쨌든 이 소모법은 적분법의 등장을 알리는 서곡이었던 것이다.

그러나 아르키메데스의 업적인 소모법은 15세기 경에야 유럽에 전해졌는데 이는 그리스 수학 중 가장 늦은 것이었다. 그 후 17세기에 들어와서 과학혁명과 함께 넓이와 부피에 대한 관심이 다시 높아졌는데, 스테빈(Stevin; 1548-1620)은 극한개념을 사용하여 구적문제에 처음으로 도전하였다. 그리고 적분법과 관련하여 무한소 개념을 발전시킨 사람은 케플러(Klpler.J; 1571-1630)로서 태양과 행성을 잇는 선분이 쓸고 지나간 영역의 넓이를 근사값으로 구하기 위하여 이 영역을 삼각형으로 분할한 다음 초보적인 미적분을 사용하여 삼각형의 넓이의 합을 구하였다. 또한 케플러는 술통을 하나의 회전체로 보고 그 부피를 수학적으로 계산하였다.

그리고 갈릴레이의 제자 카발리에리(Cavalieri.F.B; 1598-1647)는 스승인 갈릴레이에게 통의 [부피 측정법]을 배웠으며 여기에 힌트를 얻어 1635년 「불가분양의 기하학」이라는 책에서 선은 굵기가 없는 점의 운동에 의해,

1) 김치영 외(1991), 고등학교 수학Ⅱ(하) 교사용 지도서,웅진출판사, P.154

면은 폭이 없는 선의 운동에 의해, 입체는 두께가 없는 면의 운동에 의해 생기며, 이들의 요소는 그 이상 분해할 수 없는 궁극의 성분으로서 이들은 극미한 요소의 무한개의 합에 의해 길이나 넓이 및 부피가 구해진다고 생각하였다.

그 후 토리첼리(Torricelli.E; 1608-1647), 페르마(Fermat.P; 1601- 1665), 파스칼(Pascal.B; 1623-1662), 등 여러 수학자들이 카발리에리의 불가분법 또는 이와 유사한 방법을 동원하여 논리적으로 정확한 적분개념을 세우는 데 공헌하였다. 한편, 뉴턴의 스승 배로(Barrow.I; 1630-1667)는 토리첼리의 영향을 받아 기하학적인 방법을 써서 접선법과 구적법이 역의 관계임을 보이는 미적분학의 기본 정리를 발견하였다.

이와 같은 배경 밑에 극한개념을 사용하여 구분구적법을 현대적 위치로 끌어올린 영국의 뉴턴(Newton.I; 1642-1727)과 독일의 라이프니츠(Leibnitz. G.W; 1646-1716)는 구적법(적분)과 접선법(미분)이 서로 역산의 관계임을 밝혀내고 미분과 적분 사이의 관계를 확립하였다. 또, 일반적인 계산법과 기호를 도입함으로써 그때까지의 결과를 명확히 나타내고, 기계적으로 계산할 수 있는 기틀을 마련하였다.

그러나 뉴턴이나 라이프니츠 두 사람은 모두 미적분의 본질을 완전히 인식하지는 못하였다. 이들은 미적분학의 기초 개념을 정확히 규명하기에 앞서 그것을 이용하고 그 이론을 전개하였다. 그 후 오일러(Euler.L; 1707-1783), 정적분이라는 용어를 처음으로 사용한 라플라스(Laplace.P.S; 1749-1827), 기호 $\frac{dy}{dx}$, $f(x)dx$, $f'(x)$ 등을 처음으로 사용하고 뉴턴 못지 않게 일반적인 원리를 알아내는 탁월한 재능을 지니고 있었을 뿐만 아니라 보기 드문 우수한 직관력으로 추상적인 이론을 발전시킨 라그랑주(Lagrange.J.L; 1736-1813)등에 의해 많은 응용과 논리적 결함을 보완하면서 일단 정리된 체계로 성장하였다.

그 후 이러한 미적분학의 수학적·논리적 완성은 19C의 수학자들에게 맡겨졌다. 뉴턴과 라이프니츠 시대까지의 도형, 물리적 현상에 의거해서 직관

적으로 다루어졌던 구적법을 프랑스의 코시(Cauchy.A.L; 1789-1857)가 수학적 정의에 의해서 적분의 개념으로 정의함으로써 적분은 기하학적, 역학적 보조수단에서 독립하였다.

코시는 직관적인 적분개념에 극한 개념을 도입하여 정의하였으며, 불연속인 점이 유한 개인 함수에 대해서 적분을 확장하였다. 그러나 함수 $f(x)$ 의 불연속점이 무수히 많고 또, 그것이 구간 $[a, b]$ 위에 조밀하게 분포되어 있을 때는 코시의 방법으로 적분이 불가능했다. 그리하여 독일의 리만(Riemann.G.F; 1826-1866)은 코시 적분을 임의의 불연속점을 갖는 유계인 함수를 대상으로 하는 방법을 생각하여 코시 적분의 정의를 일반화시켰다.

그 후 미적분학은 여러 수학자들에 의해 이론적으로 완전한 체계를 갖추면서 많은 응용과 더불어 현대수학의 일등공신으로 성장하였다.

2. Cauchy 적분

코시의 정적분의 개념은 다음과 같다.

함수 $f(x)$ 가 폐구간 $[a, b]$ 에서 연속이라고 하자. 구간 $[a, b]$ 를 n 개의 소구간(등 간격일 필요는 없음)으로 분할하고 그 분점을 각각

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

라 하고, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ($i=1, 2, 3, \dots, n$)이라고 하자.

이때, $\max \{ \Delta x_i \mid i=1, 2, 3, \dots, n \}$ 을 이 분할의 놈(norm)이라고 한다.

각 소구간 $[x_i - x_{i-1}]$ 에서 임의의 점 x_i^* 를 택하여

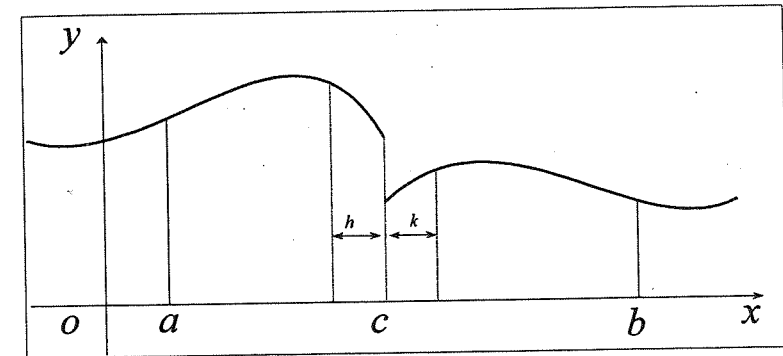
$$S_n = \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i$$

라 놓는다. 분할의 norm이 0에 수렴하도록 하면서 $n \rightarrow \infty$ 이 되게 하면 S_n 은 일정한 값에 수렴한다. 이 극한값을 함수 $f(x)$ 의 구간 $[a, b]$ 에서의

정적분이라 하고, 기호로 $\int_a^b f(x)dx$ 와 같이 나타낸다. 그런데 Cauchy적분의 정의에서는 연속성이 가정되어 있으므로 불연속적인 피적분 함수 $f(x)$ 에 대해서는 적합하지 않다. 따라서, Cauchy는 불연속점이 유한 개인 함수 $f(x)$ 에 대한 적분의 개념을 생각하게 되었다. 그 예로써, $f(x)$ 가 구간 $[a, b]$ 내의 한 개의 값 $x=c$ 에서만 불연속이면, 양수인 h, k 에 대하여,

$$\int_a^{(c-h)} f(x)dx, \int_{(c+k)}^b f(x)dx$$

를 생각할 수 있다.



여기서 $h \rightarrow 0^+, k \rightarrow 0^+$ 일 때 이들 적분이 극한값을 가진다고 하면,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h \rightarrow 0^+} \int_a^{(c-h)} f(x)dx + \lim_{k \rightarrow 0^+} \int_{(c+k)}^b f(x)dx$$

로 정의 하였다. 그러나 이 정의는 함수 $f(x)$ 가 불연속 점이 무수히 많을 때는 Cauchy의 개념에 의한 적분이 불가능하다.

3. Riemann 적분

Riemann 적분의 개념은 다음과 같다. 함수 $f(x)$ 가 폐구간 $[a, b]$ 에서 유계인 함수(연속함수일 필요는 없음)라고 하자. 즉, 임의의 $x \in [a, b]$ 에

대하여, $m \leq f(x) \leq M$ 을 만족하는 실수 m 과 M 이 존재한다고 하자.

폐구간 $[a, b]$ 의 분할 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ 를 P 라고 할 때, 분할 P 에 대하여 $M_i = \sup f(x)$, $m_i = \inf f(x)$ ($x_{i-1} \leq x \leq x_i$)라고 하면 분할 P 에 대한 f 의 상합(upper sum) $U(P, f)$ 와 하합(lower sum) $L(P, f)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$U(P, f) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i, \quad L(P, f) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \quad (\text{단, } \Delta x_i = x_i - x_{i-1})$$

일반적으로 $c_i \in [x_i, x_{i-1}]$ 일 때, 분할 P 에 대한 f 의 리만 합(Rirmann Sum)은 다음과 같이 정의된다.

$$R(P, f) = \sum_{i=1}^n f(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

f 가 폐구간에서 연속이면 최대값, 최소값을 가지므로 소구간 $[x_{i-1}, x_i]$ 에서 최대점을 α_i , 최소점을 β_i 라고 하면,

$$U(P, f) = \sum f(\alpha_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$L(P, f) = \sum f(\beta_i)(x_i - x_{i-1})$$

가 되고, $c_i \in [x_i, x_{i-1}]$ 이면 $f(\beta_i) \leq f(c_i) \leq f(\alpha_i)$ 이므로

$$L(P, f) \leq R(P, f) \leq U(P, f)$$

가 된다. 다시 말해서 리만 합은 항상 상합과 하합 사이에 있다. 다음

$$\overline{\int_a^b} f(x) \Delta x = \inf U(P, f), \quad \underline{\int_a^b} f(x) \Delta x = \sup L(P, f)$$

라 놓고 이것을 각각 함수 f 의 $[a, b]$ 에서의 상적분(upper intergral), 하적분(lower integral)이라고 한다. 만일 위의 상적분과 하적분의 값이 같으면 함수 f 는 $[a, b]$ 에서 리만 적분가능(Riemann integrable)하다고 하고, 그 공통된 값을 기호로 $\int_a^b f(x) dx$ 와 같이 나타내고 함수 f 의 구간 $[a, b]$ 에서의 정적분이라고 한다.

구간 $[a, b]$ 의 임의의 분할 P 에 대하여 다음 부등식이 성립한다.

$$m(b-a) \leq L(P, f) \leq U(P, f) \leq M(b-a)$$

따라서 임의의 유계인 함수 f 에 대하여 상적분과 하적분은 존재한다.

4. 적분의 근사계산

미적분법의 기본 정리는 단지 피적분함수에 대한 역도함수를 구할 수 있을 때만 적분계산의 쉬운 방법을 우리에게 제공한다. 정적분의 정확한 값을 구하지 못하는 경우를 살펴보면 다음과 같다. 첫번째 경우는 '미적분학의 기본정리'를 이용하여 $\int_a^b f(x)dx$ 를 구하기 위하여 f 의 원시함수를 찾아야 한다는 사실로부터 생겨난다. 그러나 때때로 원시함수를 구하다는 것은 어렵고 심지어 불가능할 경우도 있다. 예를 들어, 아래 적분들의 정확한 원시함수를 구하는 것은 불가능하다.

$$\int_1^2 e^{x^2} dx, \int_1^2 \sqrt{1+x^3} dx$$

e^{x^2} 과 $\sqrt{1+x^3}$ 은 구간 $[1, 2]$ 에서 둘 다 연속이기 때문에 위의 정적분은 존재한다. 그 정적분값은 곡선 $y=e^{x^2}$ 과 $y=\sqrt{1+x^3}$ 아래의 면적을 나타낸다. 그러나 문제는 지금까지 연구한 방법이나 또는 그밖의 어떠한 다른 방법으로도 우리가 알고있는 함수의 식으로 원시함수를 표현할 수 없는 데 기인한다. 두 번째 경우는 함수의 기계적인 수치를 통해 과학적 실험으로부터 나온 것일 경우이다. 두 가지 경우 모두 정적분의 근사값을 구할 필요가 있다. 정적분이 리만(Riemann)합들의 극한으로 정의된 것을 생각해 본다면, 리만 합은 그러한 적분의 근사값으로써 이용되어질 수 있다.

그러한 이유 때문에 필요한 만큼의 소수점까지 정적분 값을 유추하는 방법이 고안되었다. 여기서는 이러한 광범위한 주제를 일반적으로 논하지는

않을 것이나, 고등학교 학생이 이해할 수 있는 범주에서 몇 개의 유용하고 효과적인 방법을 이론적으로 소개하고 이를 실험적인 방법을 통해 확인케 함으로써 극한개념과 정적분의 정의를 충분히 이해하고 활용케 하고자 한다.

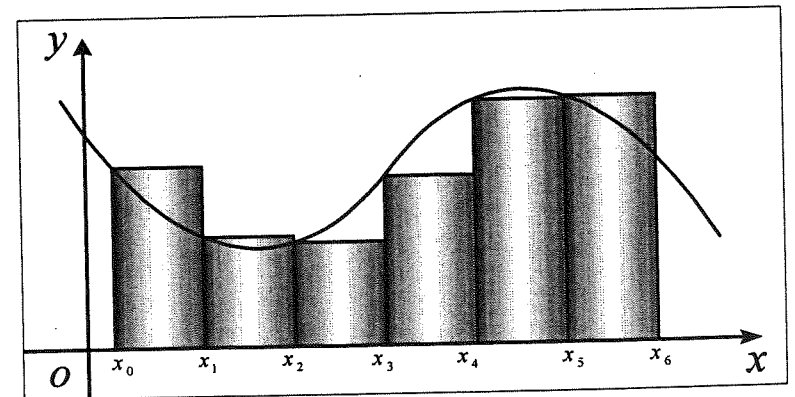
4.1 직사각형 공식

함수 f 가 구간 $[a, b]$ 에서 연속이고, 구간 $[a, b]$ 를 $\Delta x = (b-a)/n$ 의 길이를 갖는 n 개의 부분구간으로 이루어진 분할을 정한다. 그러면 x_i^* 가 그러한 분할의 i 번째 부분구간 $[x_{i-1}, x_i]$ 안에 있는 점일 때, 정적분의 정의에 의하면

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$$

이다. 따라서, 분할된 소구간들의 길이를 충분히 작게 하면 (즉, n 의 값을 충분히 크게 잡으면) 적분값은 다음과 같이 근사값으로 대체할 수 있다.

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$$



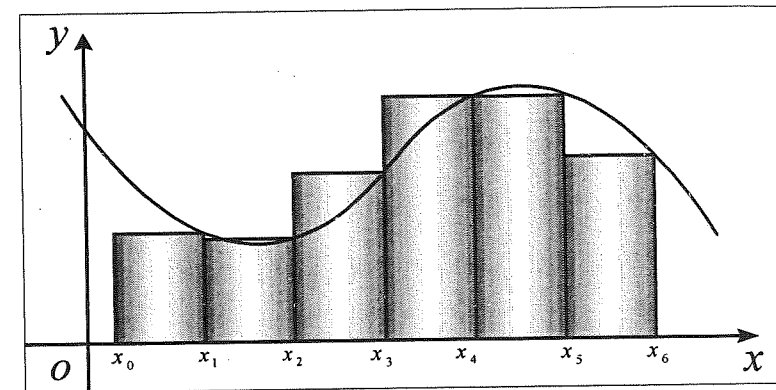
[그림 4.1(a)] 좌종점 근사값

x_i^* 가 그 구간의 좌종점일 때 $x_i^* = x_{i-1}$ 이고,

$$\int_a^b f(x) dx \approx L_n = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \Delta x \quad (4.1)$$

라고 쓸 수 있다.

$f(x) \geq 0$ 이면 그 적분은 면적을 나타내고, 식 (4.1)은 그림 4.1(a)에서 보여지는 직사각형들에 의한 이 면적의 근사값을 나타낸다.



[그림 4.1(b)] 우종점 근사값

x_i^* 가 그 구간의 우종점일 때 $x_i^* = x_i$ 이고,

$$\int_a^b f(x) dx \approx R_n = \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x \quad (4.2)$$

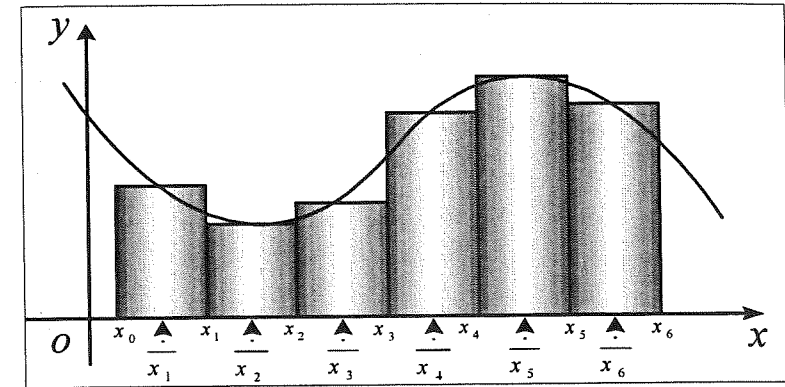
라고 쓸 수 있다 [그림 4.1(b) 참조]. 식 (4.1)과 식(4.2)에 의해 정의된 적분값 L_n 과 R_n 은 각각 좌종점 근사값, 우종점 근사값이라 부른다.

그림 4.1(c)는 L_n 혹은 R_n 보다 나은 형태인 중간점 근사값을 보여준다.

\bar{x}_i 가 주어진 분할의 i 번째 부분구간 $[x_{i-1}, x_i]$ 의 중간점일 때, 중간점 근사값은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\int_a^b f(x) dx \approx M_n = \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x \quad (4.3)$$

$$\text{단, } \bar{x}_i = \frac{1}{2} (x_{i-1} + x_i)$$

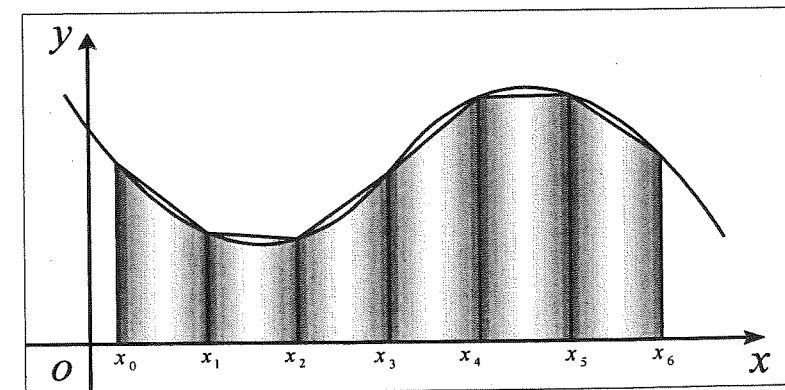


[그림 4.1(c)] 중간점 근사값

4.2 사다리꼴 공식

적분의 근사값을 구하는 수치적분의 간단한 방법 중 하나는 사각형 대신 사다리꼴로 곡선 아래의 면적을 추정하는 것이다.

함수 f 가 구간 $[a, b]$ 에서 연속이고, 구간 $[a, b]$ 를 $\Delta x = (b-a)/n$ 의 길이를 갖는 n 개의 부분구간으로 이루어진 분할을 정한다. 각 소구간의 길이가 같을 필요는 없으나, 만일 같게 하면 공식의 결과가 더 간단해진다.

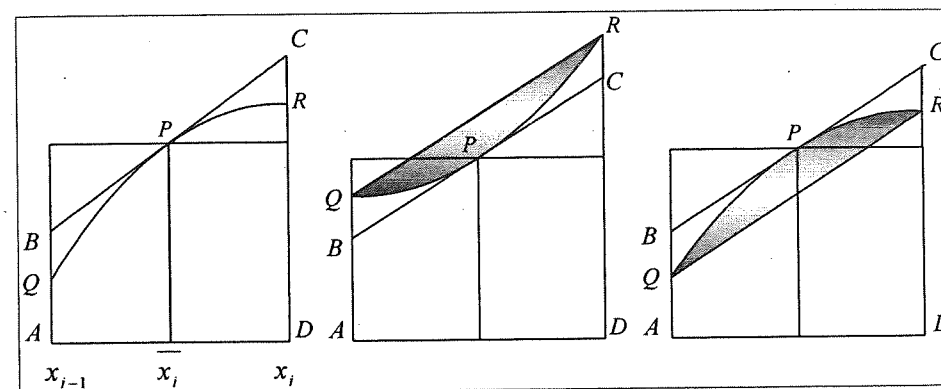


[그림 4.2(a)] 사다리꼴 근사값

그림 4.2(a)에서 알 수 있듯이, $f(x) \geq 0$ 인 구간에서의 적분값은 다음과 같이 사다리꼴의 면적의 합으로 근사값을 추정할 수 있다.

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx T_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] \Delta x & (4.4) \\ &= \frac{\Delta x}{2} [\{f(x_0) + f(x_1)\} + \{f(x_1) + f(x_2)\} + \cdots + \{f(x_{n-1}) + f(x_n)\}] \\ &= \frac{\Delta x}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)] \end{aligned}$$

다음 절에서 논하게 될 오차의 추정에서 알 수 있듯이, 그림 4.2(b)는 중간점 근사값이 사다리꼴 근사값보다 더 정확한 이유를 보여준다.



[그림 4.2(b)]

중간점 공식에서 일반적인 직사각형의 면적은 윗면 위의 점 P 에서의 곡선의 접선으로 이루어지는 사다리꼴 $ABCD$ 의 면적과 같다.

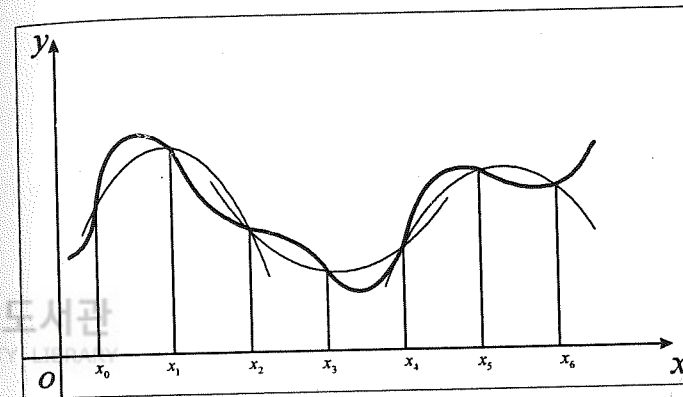
이 사다리꼴의 면적은 사다리꼴 공식에서 이용되어지는 사다리꼴 $AQRD$ 의 면적보다 곡선의 아래 면적에 더 가깝다. 즉, 중간점 오차는 사다리꼴 오차보다 더 작음을 알 수 있다.

따라서 중간점 근사값이 사다리꼴 근사값보다 더 정밀하며 다음과 같은 식으로 표현할 수 있다.

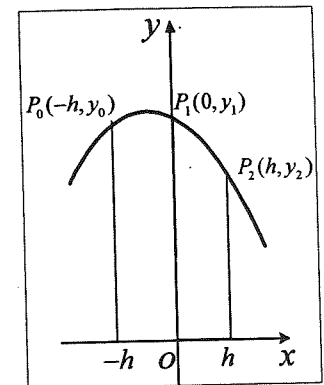
$$\left| \int_a^b f(x) - M_n \right| \leq \left| \int_a^b f(x) - T_n \right|$$

4.3 Simpson 공식

적분의 근사계산의 또 다른 방법은 곡선 아래의 면적을 근사적으로 구하기 위하여 직사각형이나 사다리꼴 대신에 포물선을 이용하는 경우이다. 이 경우는 포물선의 부분들로 이루어진 함수에 의하여 접근시키는 방법으로 사다리꼴 공식이나 중점 공식보다 더 좋은 근사값을 구하게 해준다.



[그림 4.3(a)] Simpson 근사값



[그림 4.3(b)]

함수 f 가 구간 $[a, b]$ 에서 연속이고, 앞에서와 같이 구간 $[a, b]$ 를 길이가 $\Delta x = (b-a)/n$ 인 n 개의 부분구간으로 이루어진 분할을 정한다. 그러나 이번에는 n 이 짝수라고 가정한다.

각 연속되는 구간의 쌍위에서 [그림 4.3(a)]에 표현된 포물선에 의해 곡선 $y=f(x)$ 를 근사적으로 구하여 보자. 이를 구하기 위해 $y_i=f(x_i)$ 라고 하면 점 $P_i(x_i, y_i)$ 는 $x=x_i$ 에서의 곡선 위의 점이다. 또한 연속된 세 점 P_i, P_{i+1}, P_{i+2} 을 지나는 포물선은 유일하게 존재한다. 이제 계산을 단순화하기 위하여 우선 $x_0=-h, x_1=0, x_2=h$ 라고 생각하자[그림 4.3(b)].

연속된 세 점 P_0, P_1, P_2 을 지나는 포물선의 방정식은 $y=Ax^2+Bx+C$

의 형태이고, $x=-h$ 에서 $x=h$ 에 이르는 포물선 아래의 면적은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \int_{-h}^h (Ax^2+Bx+C)dx &= \left[A\frac{x^3}{3} + B\frac{x^2}{2} + Cx \right]_{-h}^h \\ &= A\frac{h^3}{3} + B\frac{h^2}{2} + Ch + A\frac{h^3}{3} - B\frac{h^2}{2} + Ch \\ &= \frac{h}{3}(2Ah^2+6C) \end{aligned}$$

그러나, 포물선은 $P_0(-h, y_0), P_1(0, y_1), P_2(h, y_2)$ 를 지나기 때문에

$$\begin{aligned} y_0 &= A(-h)^2 + B(-h) + C = Ah^2 - Bh + C \\ y_1 &= C \\ y_2 &= Ah^2 + Bh + C \end{aligned}$$

가 되고,

$$y_0 + 4y_1 + y_2 = 2Ah^2 + 6C$$

가 된다. 따라서 포물선 아래의 면적은

$$\frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

로 다시 쓸 수 있다. 마찬가지로 세 점 P_2, P_3, P_4 을 지나는 포물선의 $x=-h$ 에서 $x=h$ 에 이르는 포물선 아래의 면적은

$$\frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4)$$

이다. 이러한 방법으로 포물선 아래의 면적을 계산하여 모두 합하면,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \approx S_n &= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) \\ &\quad + \dots + \frac{h}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n) \\ &= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 \\ &\quad + \dots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n) \end{aligned}$$

이다. 따라서 그림 4.3(a)에서 알 수 있듯이 $f(x) \geq 0$ 인 구간에서의 적분값은 다음과 같이 포물선의 아래부분 면적의 합으로 근사값을 추정할 수 있다.

$$\int_a^b f(x) dx \approx S_n = \frac{\Delta x}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)] \quad (4.5)$$

단, n 은 짝수이고, $\Delta x = (b-a)/n$ 이다.

또한, Simpson 근사값은 사다리꼴과 중간점 근사값을 이용하면,

$$S_{2n} \approx \frac{1}{3} T_n + \frac{2}{3} M_n$$

과 같은 관계식을 얻을 수 있으므로 이를 활용하면 보다 쉽게 정확한 근사값을 얻을 수 있다.

4.4 근사적 수치적분의 오차

구간의 개수를 늘리면 근사값은 참값에 더욱 가까워질 것은 당연한 일이다. 그렇지만 수치적분에 의하여 구한 답이 얼마나 정밀한 것인가 하는 의문이 생긴다.

일반적으로 수치적분을 사용하면 두가지 오차가 발생한다. 하나는 연속된 각 구간에서의 곡선을 직선 또는 포물선 등으로 어림잡아 발생한 오차이며, 또 다른 하나는 계속적인 반올림을 함으로써 생기는 반올림 오차이다. 이러한 오차는 유한 개의 점 또는 이산 상태의 많은 점에서의 함수를 생각하기 때문에 발생하는 이산오차인 것이다. 구간의 개수를 증가시키면 곡선 아래 면적의 근사치의 오차를 줄일 수 있다. 이것은 분명히 이산오차를 감소시키는 효과를 얻는다. 그 반면에, 소구간의 개수를 증가시키면 계산하는 횟수의 증가로 반올림 오차를 증가시킨다. 사실 이러한 두 오차 사이에 미묘한 균형이 있고, 또 종종 이 두 개의 오차를 합한 총오차를 최소화하는 최적의 소구간의 개수를 정할 필요가 있다.



[정리 4.4.1]2) 함수 f 와 f', f'' 이 구간 $[a, b]$ 에서 연속이면 식(4.4)에서 표현된 근사값 T_n 에 대하여

$$T_n - \int_a^b f(x) dx = \frac{(b-a)h^2}{12} f''(c) \quad (4.6)$$

를 만족하는 한 점 $c \in [a, b]$ 가 존재한다.

[증명] $k=1, 2, \dots, n$ 일 때, $x_k = a + (k-1)h$, $h = \Delta x = \frac{(b-a)}{n}$ 이고

$t \in [0, h]$ 에 대하여 함수 $\Phi_k: [0, h] \rightarrow \mathbb{R}$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$\Phi_k(t) = \frac{1}{2} t [f(x_k) + f(x_k+t)] - \int_{x_k}^{x_k+t} f(x) dx$$

이 때, $\Phi_k(0) = 0$ 이고, 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} \Phi'_k(t) &= \frac{1}{2} [f(x_k) + f(x_k+t)] + \frac{1}{2} t f'(x_k+t) - f(x_k+t) \\ &= \frac{1}{2} [f(x_k) - f(x_k+t)] + \frac{1}{2} t f'(x_k+t) \end{aligned}$$

결국 $\Phi'_k(0) = 0$ 이고,

$$\begin{aligned} \Phi''_k(t) &= -\frac{1}{2} f'(x_k+t) + \frac{1}{2} f'(x_k+t) + \frac{1}{2} t f''(x_k+t) \\ &= \frac{1}{2} t f''(x_k+t) \end{aligned}$$

이제 A, B 를 다음과 같이 정의하자.

$$A = \inf \{f''(x) : x \in [a, b]\}, \quad B = \sup \{f''(x) : x \in [a, b]\}$$

그러면 $k=1, 2, \dots, n$ 일 때, $t \in [0, h]$ 에 대하여

$$\frac{1}{2} At \leq \Phi''_k(t) \leq \frac{1}{2} Bt$$

미적분법의 기본 정리를 이용하여 적분하면 $\Phi'_k(0) = 0$ 이므로

$$\frac{1}{4} At^2 \leq \Phi'_k(t) \leq \frac{1}{4} Bt^2, \quad t \in [0, h], \quad k=1, 2, 3, \dots, n$$

2) [정리 4.41]~[따름정리 4.46] : R.G.Bartle/D.R.Sherbert, 김용태 역, 실해석학, 경문사, 1987

다시 적분하고 $t=h$ 를 취하면 $\Phi_k(0)=0$ 이므로

$$\frac{1}{12} Ah^3 \leq \Phi_k(h) \leq \frac{1}{12} Bh^3, k=1,2,3,\dots,n$$

이제 각 구간에서 위의 부등식을 모두 더하면 다음을 얻는다.

$$\frac{1}{12} Ah^3 n \leq \sum_{k=1}^n \Phi_k(h) \leq \frac{1}{12} Bh^3 n$$

결국, 다음이 추론된다.

$$\frac{1}{12} Ah^3 n \leq T_n - \int_a^b f(x) dx \leq \frac{1}{12} Bh^3 n$$

또, $h=(b-a)/n$ 이므로 다음을 얻는다.

$$\frac{1}{12} A(b-a)h^2 \leq T_n - \int_a^b f(x) dx \leq \frac{1}{12} B(b-a)h^2$$

f' 가 구간 $[a, b]$ 에서 연속이므로 A, B 의 정의와 Bolzano의 중간값 정리에 의하여 식 (4.6)이 성립하는 한 점 $c \in [a, b]$ 가 존재한다. ■



[따름정리 4.4.2] 함수 f 와 f', f'' 이 구간 $[a, b]$ 에서 연속이고, 식 (4.4)에서 표현된 근사값 T_n 에 대하여, $M = \sup\{|f''(x)|: x \in [a, b]\}$ 라고 하면

$$\left| T_n - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M \quad (4.7)$$

을 만족한다.

[정리 4.4.3] 함수 f 와 f', f'' 이 구간 $[a, b]$ 에서 연속이면 식(4.3)에서 표현된 근사값 M_n 에 대하여

$$\int_a^b f(x) dx - M_n = \frac{(b-a)h^2}{24} f''(r) \quad (4.8)$$

를 만족하는 한 점 $r \in [a, b]$ 가 존재한다.

[증명] $k=1, 2, \dots, n$ 일 때, $x_k = a + (k - \frac{1}{2})h$, $h = \Delta x = \frac{(b-a)}{n}$ 이고

$t \in [0, \frac{h}{2}]$ 에 대하여 함수 $\Psi_k: [0, \frac{h}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$\Psi_k(t) = \int_{x_k-t}^{x_k+t} f(x) dx - f(x_k)2t$$

이 때 $\Psi_k(0) = 0$ 이고, 또

$$\Psi_k(t) = \int_{x_k}^{x_k+t} f(x) dx - \int_{x_k}^{x_k-t} f(x) dx - f(x_k)2t$$

이므로 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} \Psi'_k(t) &= f(x_k+t) - f(x_k-t)(-1) - 2f(x_k) \\ &= [f(x_k+t) + f(x_k-t)] - 2f(x_k) \end{aligned}$$

결국, $\Psi'_k(0) = 0$ 이고,

$$\begin{aligned} \Psi''_k(t) &= f'(x_k+t) - f'(x_k-t)(-1) \\ &= f'(x_k+t) + f'(x_k-t) \end{aligned}$$

평균값 정리에 의하여 $\Psi''_k(t) = 2tf''(x_{k,t})$ 이고 $|x_k - x_{k,t}| < t$ 인 한 점 $x_{k,t}$ 가 존재한다. 이제 A, B 를 다음과 같이 정의하자.

$$A = \inf \{f''(x) : x \in [a, b]\}, B = \sup \{f''(x) : x \in [a, b]\}$$

그러면 $k=1, 2, \dots, n$ 일 때, $t \in [0, \frac{h}{2}]$ 에 대하여

$$2At \leq \Psi''_k(t) \leq 2Bt$$

미적분법의 기본정리를 이용하여 적분하면 $\Psi'_k(0) = 0$ 이므로

$$At^2 \leq \Psi'_k(t) \leq Bt^2, t \in [0, \frac{h}{2}], k=1, 2, 3, \dots, n$$

다시 적분하고 $t = \frac{h}{2}$ 를 취하면 $\Psi_k(0) = 0$ 이므로

$$\frac{1}{24} Ah^3 \leq \Psi_k(\frac{h}{2}) \leq \frac{1}{24} Bh^3, k=1, 2, 3, \dots, n$$

이제 각 구간에서 위의 부등식을 모두 더하면 다음을 얻는다.

$$\frac{1}{24} Ah^3 n \leq \sum_{k=1}^n \psi_k\left(\frac{h}{2}\right) \leq \frac{1}{24} Bh^3 n$$

결국, 다음이 추론된다.

$$\frac{1}{24} Ah^3 n \leq \int_a^b f(x) dx - M_n \leq \frac{1}{24} Bh^3 n$$

또 $h = (b-a)/n$ 이므로 다음을 얻는다.

$$\frac{1}{24} A(b-a)h^2 \leq \int_a^b f(x) dx - M_n \leq \frac{1}{24} B(b-a)h^2$$

f'' 가 구간 $[a, b]$ 에서 연속이므로 A, B 의 정의와 Bolzano의 중간값 정리에 의하여 식 (4.8)이 성립하는 한 점 $r \in [a, b]$ 가 존재한다. ■

[따름정리 4.4.4] 함수 f 와 f', f'' 이 구간 $[a, b]$ 에서 연속이고, 식 (4.3)에서 표현된 근사값 M_n 에 대하여 $M = \sup\{|f''(x)| : x \in [a, b]\}$ 라고 하면,

$$\left| M_n - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{(b-a)^3}{24n^2} M \quad (4.9)$$

을 만족한다.

[정리 4.4.5] 함수 f 와 $f', f'', f''', f^{(4)}$ 가 구간 $[a, b]$ 에서 연속이면 식(4.5)에서 표현된 근사값 S_n 에 대하여

$$S_n - \int_a^b f(x) dx = \frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(s) \quad (4.10)$$

를 만족하는 한 점 $s \in [a, b]$ 가 존재한다.

[증명] $k=0, 1, 2, \dots, \frac{1}{2}n-1$ 일 때, $x_k = a + (2k+1)h$,

$h = \Delta x = \frac{(b-a)}{n}$ 이고 $t \in [0, h]$ 에 대하여 함수 $\Pi_k: [0, h] \rightarrow R$ 를 다음

과 같이 정의하자.

$$\Pi_k(t) = \frac{1}{3} t [f(x_k - t) + 4f(x_k) + f(x_k + t)] - \int_{x_k - t}^{x_k + t} f(x) dx$$

이 때, $\Pi_k(0) = 0$ 이고, 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} \Pi'_k(t) &= \frac{1}{3} t [-f(x_k - t) + f(x_k + t)] \\ &\quad - \frac{2}{3} [f(x_k - t) - 2f(x_k) + f(x_k + t)] \end{aligned}$$

결국, $\Pi'_k(0) = 0$ 이고,

$$\begin{aligned} \Pi''_k(t) &= \frac{1}{3} t [f''(x_k - t) + f''(x_k + t)] \\ &\quad - \frac{1}{3} [-f'(x_k - t) + f'(x_k + t)] \end{aligned}$$

따라서 $\Pi''_k(0) = 0$ 이고,

$$\Pi'''_k(t) = \frac{1}{3} t [-f'''(x_k - t) + f'''(x_k + t)]$$

평균값 정리에 의하여 $\Pi'''_k(t) = \frac{2}{3} t^2 f^{(4)}(x_{k,t})$ 이고 $|x_k - x_{k,t}| < t$ 인

한 점 $x_{k,t}$ 가 존재한다. 이제 A, B 를 다음과 같이 정의하자.

$$A = \inf \{f^{(4)}(x) : x \in [a, b]\}, B = \sup \{f^{(4)}(x) : x \in [a, b]\}$$

그러면 $k = 0, 1, 2, \dots, \frac{1}{2}n - 1$ 일 때, $t \in [0, h]$ 에 대하여

$$\frac{2}{3} At^2 \leq \Pi'''_k(t) \leq \frac{2}{3} Bt^2$$

미적분법의 기본정리를 이용하여 적분을 세 번하면,

$k = 0, 1, 2, \dots, \frac{1}{2}n - 1$ 일 때, $t \in [0, h]$ 에 대하여

$$\frac{1}{90} At^5 \leq \Pi_k(t) \leq \frac{1}{90} Bt^5$$

$t = h$ 로 놓으면, $k=0, 1, 2, \dots, \frac{1}{2}n-1$ 에 대하여

$$\frac{1}{90} Ah^5 \leq \Pi_k(h) \leq \frac{1}{90} Bh^5$$

이제 $\frac{1}{2}n$ 개 구간에서 위의 부등식을 모두 더하면 다음을 얻는다.

$$\frac{1}{90} Ah^5 \frac{1}{2}n \leq \sum_{k=0}^{\frac{1}{2}n-1} \Pi_k(h) \leq \frac{1}{90} Bh^5 \frac{1}{2}n$$

결국, 다음이 추론된다.

$$\frac{1}{180} Ah^5 n \leq S_n - \int_a^b f(x) dx \leq \frac{1}{180} Bh^5 n$$

또, $h = (b-a)/n$ 이므로 다음을 얻는다.

$$\frac{1}{180} A(b-a)h^4 \leq S_n - \int_a^b f(x) dx \leq \frac{1}{180} B(b-a)h^4$$

$f^{(4)}$ 가 구간 $[a, b]$ 에서 연속이므로 A, B 의 정의와 Bolzano의 중간값 정리에 의하여 식 (4.10)이 성립하는 한 점 $s \in [a, b]$ 가 존재한다. ■

[따름정리 4.4.6] 함수 f 와 $f', f'', f''', f^{(4)}$ 이 구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 $M = \sup \{|f^{(4)}(x)| : x \in [a, b]\}$ 라고 하면, 식(4.5)에서 표현된 근사값 S_n 에 대하여,

$$\left| S_n - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4} M \quad (4.11)$$

을 만족한다.

IV. 정적분의 근사계산

1. $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ 의 근사계산

위의 정적분 값을 미적분학의 기본정리와 Mathematica를 이용하여 소수점 아래 20 자리까지 구하면 다음과 같다.

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx = [\ln]_1^2 = \ln 2 = 0.69314718055994530942\dots$$

이제 위에서 논한 적분의 근사값 계산들을 Mathematica([표 1.1] 참조) 또는 수치적분을 응용한 프로그램을 이용하여 그 근사값들을 구하여 보자.

편의상 구간 $[1, 2]$ 을 $1 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{15} < x_{16} = 2$ 의 16개의 부분구간으로 나누고 소수점 아래 8 자리까지 구하여 비교하기로 하자.

[좌종점 근사값]

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{1}{x} dx \approx L_{16} &= \sum_{i=1}^{16} f(x_{i-1}) \Delta x \\ &= \Delta x \{f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{15})\} \\ &\approx 0.70901620 \end{aligned}$$

[우종점 근사값]

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{1}{x} dx \approx R_{16} &= \sum_{i=1}^{16} f(x_i) \Delta x \\ &= \Delta x \{f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \dots + f(x_{16})\} \\ &\approx 0.67776620 \end{aligned}$$



제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

[표 1.1] Mathematica Procedure for Validating Riemann Sum

```
(* User Type *) f[x_]=1/x; a=1; b=2; n=16; k=15;
(* Sample Input *)
ClearAll[LHSum,RHSum,Trap,Midpt];
LHSum[f_,over_List,n_]:=
Module[{a=over[[1]],b=over[[2]],h=(b-a)/n;
Return[Sum[f[a+h*i],{i,0,n-1}]*h]];
RHSum[f_,over_List,n_]:=
Module[{a=over[[1]],b=over[[2]],h=(b-a)/n;
Return[Sum[f[a+h*i],{i,1,n}]*h]];
Trap[f_,over_List,n_]:=
Module[{a=over[[1]],b=over[[2]],h=(b-a)/n;
Return[(Sum[f[a+h*i],{i,1,n-1}]+(f[a]+f[b])/2)*h]];
Midpt[f_,over_List,n_]:=
Module[{a=over[[1]],b=over[[2]],h=(b-a)/n;
Return[h*Sum[f[a+h*(i-1/2)],{i,1,n}]]];
m=Midpt[f,{a,b},n/2]; t=Trap[f,{a,b},n/2];
Print["Chack Values for Numerical Integration:"];
Print[" "];
Print["Integration of ",OutputForm[f[x]]," on [",a,",",b,"]:"];
Print[" "];
Print["Exact Value : ", N[Integrate[f[x],{x,a,b}],k]];
Print[" LH Sum (n=",n,") : ", N[LHSum[f,{a,b},n],k]];
Print[" RH Sum (n=",n,") : ", N[RHSum[f,{a,b},n],k]];
Print[" Midpoint Sum (n=",n,") : ", N[Midpt[f,{a,b},n],k]];
Print[" Trapezoidal Sum (n=",n,") : ", N[Trap[f,{a,b},n],k]];
Print[" Simpson Sum (n=",n,") : ", N[(2*m+t)/3,k]];
(* Sample Output *)
Chack Values for Numerical Integration:
Integral of  $\frac{1}{x}$  on [1,2]:
Exact Value : 0.693147180559947
LH Sum (n=16) : 0.709016202207527
RH Sum (n=16) : 0.677766202207527
Midpoint Sum (n=16) : 0.693025214330971
Trapezoidal Sum (n=16) : 0.693391202207527
Simpson Sum (n=16) : 0.693147652819419
```



[중간점 근사값]

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx \approx M_{16} = \sum_{i=1}^{16} f(\bar{x}_i) \Delta x = \sum_{i=1}^{16} f\left(\frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)\right) \Delta x$$

$$= \frac{\Delta x}{2} \left[f\left(\frac{1}{2}(x_0 + x_1)\right) + f\left(\frac{1}{2}(x_1 + x_2)\right) + \dots + f\left(\frac{1}{2}(x_{15} + x_{16})\right) \right] \approx 0.69302521$$

[표 1.2]

f(x)=1/x from 1 to 2					0.69314718
n	Ln	Rn	Mn	Tn	Sn
4	0.75952381	0.63452381	0.69121989	0.69702381	0.69325397
8	0.72537185	0.66287185	0.69266055	0.69412185	0.69315453
16	0.70901620	0.67776620	0.69302521	0.69339120	0.69314765
32	0.70102071	0.68539571	0.69311667	0.69320821	0.69314721
64	0.69706869	0.68925619	0.69313955	0.69316244	0.69314718
128	0.69510412	0.69119787	0.69314527	0.69315100	0.69314718
256	0.69412470	0.69217157	0.69314670	0.69314813	0.69314718
512	0.69363570	0.69265914	0.69314706	0.69314742	0.69314718
n	ELn	ERn	EMn	ETn	ESn
4	0.06637663	-0.05862337	-0.00192729	0.00387663	0.00010679
8	0.03222467	-0.03027533	-0.00048663	0.00097467	0.00000735
16	0.01586902	-0.01538098	-0.00012197	0.00024402	0.00000047
32	0.00787353	-0.00775147	-0.00003051	0.00006103	0.00000003
64	0.00392151	-0.00389099	-0.00000763	0.00001526	0.00000000
128	0.00195694	-0.00194931	-0.00000191	0.00000382	0.00000000
256	0.00097752	-0.00097561	-0.00000048	0.00000095	0.00000000
512	0.00048852	-0.00048804	-0.00000012	0.00000024	0.00000000
n	%Ln	%Rn	%Mn	%Tn	%Sn
4	9.57612%	8.45756%	0.27805%	0.55928%	0.01541%
8	4.64904%	4.36781%	0.07021%	0.14062%	0.00106%
16	2.28942%	2.21901%	0.01760%	0.03520%	0.00007%
32	1.13591%	1.11830%	0.00440%	0.00880%	0.00000%
64	0.56575%	0.56135%	0.00110%	0.00220%	0.00000%
128	0.28233%	0.28123%	0.00028%	0.00055%	0.00000%
256	0.14103%	0.14075%	0.00007%	0.00014%	0.00000%
512	0.07048%	0.07041%	0.00002%	0.00003%	0.00000%



[사다리꼴 근사값]

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{1}{x} dx &\approx T_{16} = \sum_{i=1}^{16} \frac{1}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] \Delta x \\ &= \frac{\Delta x}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots \\ &\quad + 2f(x_{15}) + f(x_{16})] \approx 0.69339120 \end{aligned}$$

[Simpson 근사값]

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{1}{x} dx &\approx S_{16} \\ &= \frac{\Delta x}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) \\ &\quad \dots + 2f(x_{14}) + 4f(x_{15}) + f(x_{16})] \approx 0.69314765 \end{aligned}$$



제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

이제 n 의 값을 증가시키면서 각 근사값과 그의 오차 및 오차율을 계산하여 보자. $X = L_n, R_n, M_n, T_n, S_n$ 일 때, 각 근사값의 오차와 오차율을

$$EX = X - \int_1^2 \frac{1}{x} dx, \quad \%X = \left\{ |EX| \left/ \int_1^2 \frac{1}{x} dx \right. \right\} \times \frac{1}{100} (\%)$$

과 같이 정의하면 [표 1.2]를 얻을 수 있으며, 그로부터 다음과 같은 몇 가지 관찰할 수 있다.

1. n 값이 증가할수록 더욱 정확한 근사값을 얻을 수 있다. (그러나 n 이 아주 큰 경우에 누적된 사사오입의 오차를 주의해야 할 많은 산술적인 연산들이 필요하다.)
2. 좌·우종점 근사값에서의 오차는 부호가 서로 다르고 n 의 값이 2배로 늘어날 때, 약 1/2만큼 줄어든다.
3. 사다리꼴과 중간점 근사값은 좌·우종점 근사값보다 더 정확하다.
4. 사다리꼴과 중간점 근사값의 오차들은 부호가 서로 다르고 n 의 값이 2배로 늘어날 때, 약 1/4만큼 줄어든다.

5. 중간점 근사값의 오차의 크기는 사다리꼴 근사값에서의 오차의 크기의 약 1/2에 해당한다.
6. Simpson 근사값은 그 어느것 보다도 더 정확하며 n 의 값이 2배로 늘어날 때, 약 1/16만큼 줄어든다.

2. $\int_1^2 e^{x^2} dx$ 의 근사계산

$\int_1^2 e^{x^2} dx$ 의 정확한 원시함수를 구하는 일은 불가능하다. 그러나 위에서 논한 수치적분의 이론과 Mathematica을 비롯한 수치적분을 응용한 여러 가지 프로그램을 이용하면 근사적으로 적분의 값을 구할 수 있으며, 또한 그 값의 오차를 추정할 수 있다. 다음의 [표 2.1]은 Mathematica에서 [표 1.1]과 같은 프로그램을 실행하여 얻은 출력의 결과이다.

[표 2.1]

Chack Values for Numerical Integration: Integration of e^{x^2} on [1,2] :	
Exact Value	: 14.98997602
LH Sum (n=16)	: 13.43795136
RH Sum (n=16)	: 16.68044313
Midpoint Sum (n=16)	: 14.95540303
Trapezoidal Sum (n=16)	: 15.05919725
Simpson Sum (n=16)	: 14.99037334

[예제 1] $n = 16$ 인 사다리꼴 공식을 이용하여 적분 $\int_1^2 e^{x^2} dx$ 을 근사적으로 구하고, 그 근사값에 대한 오차의 상한을 추정하시오.

[풀이] $a=1, b=2, n=16$ 이므로 사다리꼴 공식을 사용하면,

$$\begin{aligned} \int_1^2 e^{x^2} dx &\approx T_{16} = \sum_{i=1}^{16} \frac{1}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] \Delta x \\ &= \frac{\Delta x}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots \\ &\quad + 2f(x_{15}) + f(x_{16})] \approx 15.05919725 \end{aligned}$$

$f(x) = e^{x^2}$ 이기 때문에 $f'(x) = 2xe^{x^2}$, $f''(x) = (2+4x^2)e^{x^2}$ 이다.

또한, $1 \leq x \leq 2$ 이므로 $1 \leq x^2 \leq 4$ 이며

$$|f''(x)| = |(2+4x^2)e^{x^2}| \leq 18e^4$$

이다. 오차추정(식 4.7)에서 $M=18e^4, a=1, b=2, n=16$ 으로 택하면 오차의 상한은

$$\frac{(2-1)^3}{12 \cdot 16^2} \cdot 18e^4 \approx 0.319911$$

으로 추정할 수 있다. ■

[예제2] $n=16$ 인 중간점 공식을 이용하여 적분 $\int_1^2 e^{x^2} dx$ 을 근사적으로 구하고, 그 근사값에 대한 오차의 상한을 추정하시오.

[풀이] $a=1, b=2, n=16$ 이므로 중간점 공식을 사용하면,

$$\begin{aligned} \int_1^2 e^{x^2} dx &\approx M_{16} = \sum_{i=1}^{16} f(\bar{x}_i) \Delta x = \sum_{i=1}^{16} f\left(\frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)\right) \Delta x \\ &= \frac{\Delta x}{2} \left[f\left(\frac{1}{2}(x_0 + x_1)\right) + f\left(\frac{1}{2}(x_1 + x_2)\right) + \dots \right. \\ &\quad \left. + f\left(\frac{1}{2}(x_{15} + x_{16})\right) \right] \approx 14.95540303 \end{aligned}$$

$f(x) = e^{x^2}$ 이기 때문에 $f'(x) = 2xe^{x^2}$, $f''(x) = (2+4x^2)e^{x^2}$ 이다.

또한, $1 \leq x \leq 2$ 이므로 $1 \leq x^2 \leq 4$ 이며

$$|f''(x)| = |(2+4x^2)e^{x^2}| \leq 18e^4$$

이다. 오차추정(식 4.9)에서 $M=18e^4$, $a=1$, $b=2$, $n=16$ 으로 택하면 오차의 상한은

$$\frac{(2-1)^3}{24 \cdot 16^2} \cdot 18e^4 \approx 0.159956$$

으로 추정할 수 있다. ■

[예제3] $n=16$ 인 Simpson 공식을 이용하여 적분 $\int_1^2 e^{x^2} dx$ 을 근사적으로 구하고, 그 근사값에 대한 오차의 상한을 추정하시오.

[풀이] $a=1$, $b=2$, $n=16$ 이므로 Simpson 공식을 사용하면,

$$\begin{aligned} \int_1^2 e^{x^2} dx &\approx S_{16} \\ &= \frac{4x}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) \\ &\quad \dots + 2f(x_{14}) + 4f(x_{15}) + f(x_{16})] \approx 14.99037334 \end{aligned}$$

$f(x) = e^{x^2}$ 이기 때문에 $f^{(4)}(x) = (12 + 48x^2 + 16x^4)e^{x^2}$ 이다.

또한, $1 \leq x \leq 2$ 이므로 $1 \leq x^2 \leq 4$ 이며

$$|f^{(4)}(x)| = |(12 + 48x^2 + 16x^4)e^{x^2}| \leq 460e^4$$

이다. 오차추정(식 4.11)에서 $M=460e^4$, $a=1$, $b=2$, $n=16$ 으로 택하면 오차의 상한은

$$\frac{(2-1)^5}{180 \cdot 16^4} \cdot 460e^4 \approx 0.002129$$

으로 추정할 수 있다. ■

3. 곡선의 곡률과 수치적분의 고찰

벡터함수 \mathbf{r} 로 주어지는 원활한 곡선에서는 $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ 이다.
단위접선 벡터는

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

로 주어지고, 곡선의 방향을 나타낸다. 곡선 위의 주어진 점에서의 곡률은 그 점에서 곡선이 얼마나 빠르게 방향을 바꾸는가 하는 것을 잴 것이다. 정확하게는, 곡률은 호의 길이에 대한 단위접선 벡터의 순간변화율의 크기로 정의된다.

[정의] 곡선의 곡률은 \mathbf{T} 가 단위접선 벡터일 때, $\kappa = \left| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right|$ 이다.

곡률은 s 보다는 매개변수 t 의 함으로 표시되어 있으면 보다 쉽게 계산할 수 있으며

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{d\mathbf{T}}{ds} \frac{ds}{dt} \Rightarrow \kappa = \left| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right| = \left| \frac{d\mathbf{T}/dt}{ds/dt} \right|$$

이다. 또한, $ds/dt = |\mathbf{r}'(t)|$ 이므로

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

로 표현할 수 있다.

[정리] 3) 벡터함수 \mathbf{r} 로 주어진 곡선의 곡률은 다음과 같이 표현된다.

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}$$

3) James Stewart, 수학교재편찬위원회 역, 미분적분학, 청문각, 1996

[증명] $\mathbf{T} = \mathbf{r}'/|\mathbf{r}'|$, $|\mathbf{r}'| = ds/dt$ 이므로

$$\mathbf{r}' = |\mathbf{r}'|\mathbf{T} = \frac{ds}{dt}\mathbf{T}, \quad \mathbf{r}'' = \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} + \frac{ds}{dt}\mathbf{T}'$$

이다. 또한, $\mathbf{T} \times \mathbf{T} = \mathbf{0}$ 이므로

$$\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = \frac{ds}{dt}\mathbf{T} \times \left(\frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} + \frac{ds}{dt}\mathbf{T}' \right) = (ds/dt)^2(\mathbf{T} \times \mathbf{T}')$$

이다. 이제 모든 t 에 대하여 $|\mathbf{T}(t)| = 1$ 이므로 \mathbf{T} 와 \mathbf{T}' 는 직교한다.

$$|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''| = \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 |\mathbf{T} \times \mathbf{T}'| = \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 |\mathbf{T}| |\mathbf{T}'| = \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 |\mathbf{T}'|$$

$$\therefore |\mathbf{T}'| = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{(ds/dt)^2} = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|^2}$$

그러므로 곡률은 다음과 같이 표현된다.

$$\kappa = \frac{|\mathbf{T}'|}{|\mathbf{r}'|} = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|^3} \quad \blacksquare$$

방정식이 $y = f(x)$ 인 평면곡선의 특별한 경우에 x 를 매개변수로 택하여, $\mathbf{r}(x) = x\mathbf{i} + f(x)\mathbf{j}$ 로 쓸 수 있으며

$$\mathbf{r}'(x) = \mathbf{i} + f'(x)\mathbf{j}, \quad \mathbf{r}''(x) = f''(x)\mathbf{j}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0}$$

이므로 $\mathbf{r}'(x) \times \mathbf{r}''(x) = f''(x)\mathbf{k}$ 를 얻는다.

또한, $|\mathbf{r}'(x)| = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ 이므로 곡률은 다음과 같이 표현된다.

$$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{[1 + (f'(x))^2]^{3/2}}$$

※ 구간 $[1, 2]$ 에서의 $y = \log x$, $y = e^{x-2}$, $y = \sin x$ 의 근사적분

구간을 몇 개의 소구간으로 나누고 이들 소구간의 각 끝점에서의 곡률들의 평균을 그 구간에서의 구간곡률이라고 하자. 소구간의 길이를 작게 할수록 곡선의 성질을 잘 표현할 수 있게 된다.

[표 3.1]

<p>(* Curvature *) $f[x]=\text{Log}[x]$; $a=1$; $b=2$; $n=1000$; $k=10$; $\text{Curv}[f_over_List,n_]:=$ $\text{Module}\{a=over[[1]],b=over[[2]],h\},h=(b-a)/n$; $\text{Return}[\text{Sum}[\text{Abs}[f''[a+h*i]]/((1+(f'[a+h*i])^2)^{(3/2))},\{i,0,n\}]]$]; $\text{Print}[\text{"Mean Curvature of "},\text{OutputForm}[f[x]],\text{" on "},\{a,b\},\text{" : "}]$; $\text{Print}[\text{" "}]$; $\text{Print}[\text{"Exact Value (n="},n,\text{") : "},N[\text{Curv}[f,\{a,b\},n]/(n+1),k]]$;</p>	
Averaged Curvature of Log[x] on [1,2]	Exact Value (n=1000) : 0.2598995099
Averaged Curvature of Exp[x-2] on [1,2]	Exact Value (n=1000) : 0.3618160002
Averaged Curvature of Sin[x] on [1,2]	Exact Value (n=1000) : 0.8593460309

[표 3.2]

Integration of $y=\text{Log}(x)$ on [1,2]								
Value : 0.38629					Curvature : 0.2599			
n	Ln	%Ln	Tn	%Tn	Mn	%Mn	Sn	%Sn
4	0.29706	23.099%	0.38370	0.670%	0.38759	0.337%	0.38626	0.008%
8	0.34232	11.383%	0.38564	0.168%	0.38662	0.085%	0.38629	0.000%
16	0.36447	5.649%	0.38613	0.041%	0.38638	0.023%	0.38629	0.000%
32	0.37542	2.814%	0.38625	0.010%	0.38631	0.005%	0.38629	0.000%
64	0.38087	1.403%	0.38628	0.003%	0.38630	0.003%	0.38629	0.000%
Integration of $y=\text{Exp}(x-2)$ on [1,2]								
Value : 0.63212					Curvature : 0.3618			
n	Ln	%Ln	Tn	%Tn	Mn	%Mn	Sn	%Sn
4	0.55639	11.980%	0.63541	0.520%	0.63048	0.259%	0.63213	0.002%
8	0.59344	6.119%	0.63294	0.130%	0.63171	0.065%	0.63212	0.000%
16	0.61257	3.093%	0.63233	0.033%	0.63202	0.016%	0.63212	0.000%
32	0.62230	1.554%	0.63217	0.008%	0.63209	0.005%	0.63212	0.000%
64	0.62719	0.780%	0.63213	0.002%	0.63211	0.002%	0.63212	0.000%
Integration of $y=\text{Sin}(x)$ on [1,2]								
Value : 0.95645					Curvature : 0.8593			
n	Ln	%Ln	Tn	%Tn	Mn	%Mn	Sn	%Sn
4	0.94298	1.408%	0.95146	0.522%	0.95894	0.260%	0.95647	0.002%
8	0.95096	0.574%	0.95520	0.131%	0.95707	0.065%	0.95645	0.000%
16	0.95402	0.254%	0.95614	0.032%	0.95660	0.016%	0.95645	0.000%
32	0.95531	0.119%	0.95637	0.008%	0.95649	0.004%	0.95645	0.000%
64	0.95590	0.058%	0.95643	0.002%	0.95646	0.001%	0.95645	0.000%

[표 3.1]은 구간 [1, 2]에 대한 세 곡선의 구간곡률을 Mathematica를 이용하여 1000 개의 소구간으로 나누어 구한 것이다. 표에서 알 수 있듯이 세 곡선은 $y = \log x$, $y = e^{x-2}$, $y = \sin x$ 의 순서로 구간곡률이 커지고 있다. [표 3.2]는 $\int_1^2 \log x dx$, $\int_1^2 e^{(x-2)} dx$, $\int_1^2 \sin x dx$ 의 값을 수치적분 프로그램인 Integral을 이용하여 구하고, 이를 좌종점 공식(Ln), 사다리꼴 공식(Tn), 중간점 공식(Mn), Simpson 공식(Sn)으로 구분하여 표현한 것이다. 위 표를 관찰해 보면, 구간곡률이 클수록 근사적분값은 참값으로의 수렴 속도가 빠름을 알 수 있다. 즉, 곡선이 많이 휘수록 근사적분값은 정적분값과의 오차가 훨씬 작아지고 있음을 추측할 수 있다.

※ 구간에 따른 $y = e^{x^2}$ 의 근사적분

동일한 곡선에서 상이한 구간곡률을 갖는 구간에서의 근사적분의 수렴 속도를 알아보기 위해 함수 $y = e^{x^2}$ 의 구간곡률을 Mathematica를 이용하여 세 구간 [0, 0.5], [0.5, 1], [1, 1.5]을 각각 1000 개의 소구간으로 나누어 구하여보면 [표 3.3]과 같다.

[표 3.3]

<pre>(* Curvature *) f[x_]=Exp[x^2]; a=0.5; b=1; n=1000; k=10; Curv[f_,over_List,n]:= Module[{a=over[[1]],b=over[[2]],h},h=(b-a)/n; Return[Sum[Abs[f'[a+h*i]]/((1+(f'[a+h*i])^2)^(3/2)),{i,0,n}]]; Print["Mean Curvature of ",OutputForm[f[x]]," on [",a,",",b,":"]; Print[""]; Print["Exact Value (n=",n,") : ", N[Curv[f,{a,b},n]/(n+1),k]];</pre>	
Averaged Curvature of Exp[x^2] on [0,0.5]	Exact Value (n=1000) : 1.5777907222
Averaged Curvature of Exp[x^2] on [0.5,1]	Exact Value (n=1000) : 0.3891853682
Averaged Curvature of Exp[x^2] on [1,1.5]	Exact Value (n=1000) : 0.0317843695

또한 이들 구간에 대한 함수 $y=e^{x^2}$ 의 근사적분을 수치적분 프로그램인 Integral을 이용하여 구하면 [표 3.4]를 얻을 수 있다.

[표 3.4]

Integration of $y=Exp(x^2)$ on [0,0.5]								
	Value : 0.54499				Curvature : 1.5778			
n	Ln	%Ln	Tn	%Tn	Mn	%Mn	Sn	%Sn
4	0.52890	2.952%	0.54666	0.306%	0.54415	0.154%	0.54500	0.002%
8	0.53653	1.552%	0.54540	0.075%	0.54478	0.039%	0.54499	0.000%
16	0.54065	0.796%	0.54509	0.018%	0.54493	0.011%	0.54499	0.000%
32	0.54279	0.404%	0.54501	0.004%	0.54497	0.004%	0.54499	0.000%
64	0.54388	0.204%	0.54500	0.002%	0.54499	0.000%	0.54499	0.000%
Integration of $y=Exp(x^2)$ on [0.5,1]								
	Value : 0.91766				Curvature : 0.3892			
n	Ln	%Ln	Tn	%Tn	Mn	%Mn	Sn	%Sn
4	0.83341	9.181%	0.92306	0.588%	0.91497	0.293%	0.91772	0.007%
8	0.87419	4.737%	0.91902	0.148%	0.91699	0.073%	0.91767	0.001%
16	0.89560	2.404%	0.91800	0.037%	0.91750	0.017%	0.91766	0.000%
32	0.90654	1.212%	0.91775	0.010%	0.91762	0.004%	0.91766	0.000%
64	0.91208	0.608%	0.91769	0.003%	0.91765	0.001%	0.91766	0.000%
Integration of $y=Exp(x^2)$ on [1,1.5]								
	Value : 2.60046				Curvature : 0.0318			
n	Ln	%Ln	Tn	%Tn	Mn	%Mn	Sn	%Sn
4	2.20723	15.122%	2.63032	1.148%	2.58558	0.572%	2.60095	0.019%
8	2.39640	7.847%	2.60795	0.288%	2.59672	0.144%	2.60049	0.001%
16	2.49656	3.995%	2.60233	0.072%	2.59953	0.036%	2.60046	0.000%
32	2.54804	2.016%	2.60093	0.018%	2.60023	0.009%	2.60046	0.000%
64	2.57414	1.012%	2.60058	0.005%	2.60040	0.002%	2.60046	0.000%

위의 경우에도 표를 관찰해 보면, 구간폭이 클수록 근사적분값은 참값으로의 수렴 속도가 빠름을 알 수 있다. 즉, 곡선의 구간폭은 근사적분값의 오차에 영향을 주고 있다는 추측을 할 수 있다.

4. 수학교실에서의 컴퓨터 활용

학습환경의 개선으로 인한 수학교실에서의 컴퓨터와 Mathematica를 비롯한 여러 가지의 수학 패키지를 활용한 교수·학습의 예를 살펴보기로 하자. [표 4.1]과 [표 4.2]는 Mathematica([표 1.1] 참조) 또는 인터넷 등을 통하여 쉽게 접할 수 있는 수치적분을 응용한 프로그램을 이용하여 곡선 $f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$ 의 근사값들을 n 의 값을 증가시키면서 좌종점 공식(L_n), 우종점 공식(R_n), 사다리꼴 공식(T_n), 중간점 공식(M_n), Simpson 공식(S_n)으로 구분하고, 각 근사값과 그의 오차 및 오차율을 다음과 같이 계산하여 표현한 것이다.

$X = L_n, R_n, M_n, T_n, S_n$ 일 때, 각 근사값의 오차와 오차율을

$$EX = X - \int_1^2 \frac{1}{x} dx, \quad \%X = \left\{ |EX| \left/ \int_1^2 \frac{1}{x} dx \right. \right\} \times \frac{1}{100} (\%)$$

로 나타내기로 하자.

[표 4.1]

Check Values for Numerical Integration:	
Integration of $0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$	
on $[0,1]$ with $n=16$:	
Exact Value	: 1.45
LH Sum (n=16)	: 1.458087158
RH Sum (n=16)	: 1.458087158
Midpoint Sum (n=16)	: 1.445975494
Trapezoidal Sum (n=16)	: 1.458087158
Simpson Sum (n=16)	: 1.450203451

위에 주어진 함수에 대해서는 좌종점 근사값(L_n), 우종점 근사값(R_n)이 서로 같으므로 $T_n = \frac{1}{2}(L_n + R_n)$ 의 관계에 의하여 사다리꼴 근사값도

[표 4.2]

f(x)=0.2+25x+200x ² +675x ³ -900x ⁴ +400x ⁵ from 0 to 1					1.45000000
n	Ln	Rn	Mn	Tn	Sn
4	1.56718750	1.56718750	1.39628906	1.56718750	1.50208333
8	1.48173828	1.48173828	1.43443604	1.48173828	1.45325521
16	1.45808716	1.45808716	1.44597549	1.45808716	1.45020345
32	1.45203133	1.45203133	1.44898553	1.45203133	1.45001272
64	1.45050843	1.45050843	1.44974586	1.45050843	1.45000079
128	1.45012714	1.45012714	1.44993643	1.45012714	1.45000005
n	ELn	ERn	EMn	ETn	ESn
4	-0.11718750	-0.11718750	0.05371094	-0.11718750	-0.05208333
8	-0.03173828	-0.03173828	0.01556396	-0.03173828	-0.00325521
16	-0.00808716	-0.00808716	0.00402451	-0.00808716	-0.00020345
32	-0.00203133	-0.00203133	0.00101447	-0.00203133	-0.00001272
64	-0.00050843	-0.00050843	0.00025414	-0.00050843	-0.00000079
128	-0.00012714	-0.00012714	0.00006357	-0.00012714	-0.00000005
n	%Ln	%Rn	%Mn	%Tn	%Sn
4	8.08190%	8.08190%	3.70420%	8.08190%	3.59195%
8	2.18885%	2.18885%	1.07338%	2.18885%	0.22450%
16	0.55774%	0.55774%	0.27755%	0.55774%	0.01403%
32	0.14009%	0.14009%	0.06996%	0.14009%	0.00088%
64	0.03506%	0.03506%	0.01753%	0.03506%	0.00005%
128	0.00877%	0.00877%	0.00438%	0.00877%	0.00000%

일치한다는 것을 쉽게 확인할 수 있다. 그러나 [표 4.2]을 통하여 중간점 근사값(Ln)은 사다리꼴 근사값 보다 더 정확하다는 것을 다시 한 번 확인할 수 있다. 현행 고등학교 교육과정에서는 계산의 복잡성 때문에 중간점 근사값(Ln)을 다루지 않고 있지만, 시대의 변천에 따른 교실환경의 개선으로 컴퓨터를 수학학습에 활용하면 보다 쉽게 학생들로 하여금 수치적분에 의한 정적분값의 계산과 극한의 개념을 파악하게 할 수 있다. 또한 그리기 어려운 여러 가지 함수의 그래프를 수학 패키지를, 활용한 교수·학습에서는 단순한 조작으로 쉽게 해결 할 수 있어 수학에 대한 흥미를 갖게하면서 생기있고 활기찬 수학교실을 이끌 수 있다. 다음 [표 4.3]은 Mathematica를 이용하여 수치적분에서 활용하는 좌종점 공식(Ln), 우종점 공식(Rn), 사다

리플 공식(Tn), 중간점 공식(Mn)을 시각적으로 표현할 수 있는 수리 패키지이며, [그림 4.4a~4.4d]는 그 출력의 결과이다.

[표 4.3-1]

(* IntegralGraphics *)

(*
rightrect::usage="rightrect[f[x],{x,a,b,n}] draws right-hand
endpoint rectangles."
leftrect::usage="leftrect[f[x],{x,a,b,n}] draws left-hand
endpoint rectangles."
midrect::usage="midrect[f[x],{x,a,b,n}] draws mid-point
rectangles."
trapezoid::usage="trapezoid[f[x],{x,a,b,n}] draws trapezoids."
error::usage="error[estimate] computes the error between
estimate and the area of the region under consideration."
*)

```
box[x_,y_,h_] = Graphics[{RGBColor[0,0,1],  
  Line[{x, 0},{x, y},  
  {x + h, y},  
  {x + h, 0}]}];
```

```
rightrect[func_,paramlist_] :=  
  Module[{boxes, curve, k, a, b, h, n, param, x},  
    param = paramlist[[1]];  
    a = N[paramlist[[2]]];  
    b = N[paramlist[[3]]];  
    n = N[paramlist[[4]]];  
    h = (b - a)/n;
```

```
boxes = Table[box[a + k h,func /. param->(a + k h),-h], {k,1,n}];
```

[표 43-2]

```
curve = Plot[func /. param -> x,{x,a,b},  
            PlotStyle->RGBColor[1,0,0],DisplayFunction->Identity];  
Show[{boxes,curve}, DisplayFunction -> $DisplayFunction,  
     Axes -> True, AxesOrigin -> {a,0}]  
]
```

```
leftrect[func_,paramlist_] :=  
Module[{boxes, curve, k, a, b, h, n, param, x},  
  param = paramlist[[1]];  
  a = N[paramlist[[2]]];  
  b = N[paramlist[[3]]];  
  n = N[paramlist[[4]]];  
  h = (b - a)/n;  
  boxes = Table[box[a + k h,func /. param->(a + k h),h],  
                {k,0,n-1}];  
  curve = Plot[func /. param -> x,{x,a,b},  
              PlotStyle->RGBColor[1,0,0],DisplayFunction->Identity];  
  Show[boxes,curve, DisplayFunction -> $DisplayFunction,  
       Axes -> True, AxesOrigin -> {a,0}]  
]
```

```
midrect[func_,paramlist_] :=  
Block[{boxes, curve, k, a, b, h, n, param, x},  
  param = paramlist[[1]];  
  a = N[paramlist[[2]]];  
  b = N[paramlist[[3]]];  
  n = N[paramlist[[4]]];  
  h = (b - a)/n;
```

[표 43-3]

```

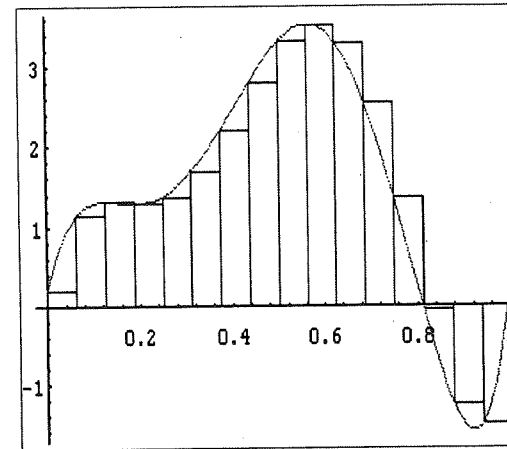
boxes = Table[box[a + k h,func /. param->(a + (k-0.5)h),
-h], {k,1,n}];
curve = Plot[func /. param -> x,{x,a,b},
PlotStyle->RGBColor[1,0,0],DisplayFunction->Identity];
Show[boxes,curve, DisplayFunction -> $DisplayFunction,
Axes -> True,AxesOrigin -> {a,0}]
]
trap[x0_,y0_,x1_,y1_] = Graphics[{RGBColor[0,0,1],
Line[{{x0,0},{x0,y0},{x1,y1},{x1,0}}]};

trapezoid[func_,paramlist_] :=
Module[{boxes, curve, k, a, b, h, n, param, x},
param = paramlist[[1]];
a = N[paramlist[[2]]];
b = N[paramlist[[3]]];
n = N[paramlist[[4]]];
h = (b - a)/n;
boxes = Table[trap[a + k h,func /. param ->(a + k h),
a + (k+1)h,func /. param ->(a + (k+1)h)],{k,0,n-1}];
curve = Plot[func /. param -> x,{x,a,b},
PlotStyle->RGBColor[1,0,0],DisplayFunction->Identity];
Show[boxes,curve, DisplayFunction -> $DisplayFunction,
Axes -> True, AxesOrigin -> {a,0}]
]

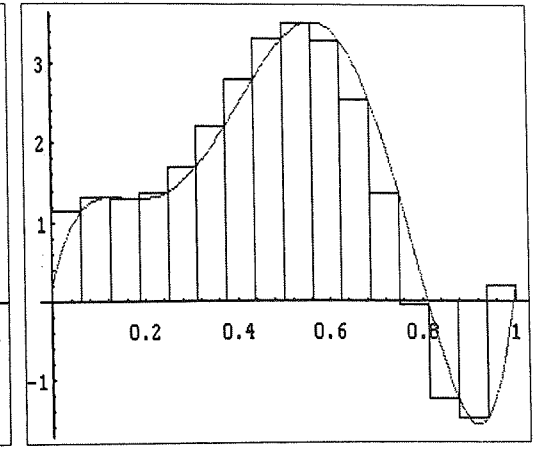
error[est_] := est

```

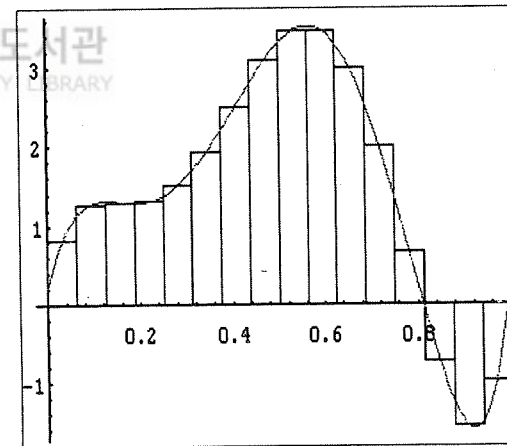
※ $f(x) = 0.2 + 25x + 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$ 의 Graph



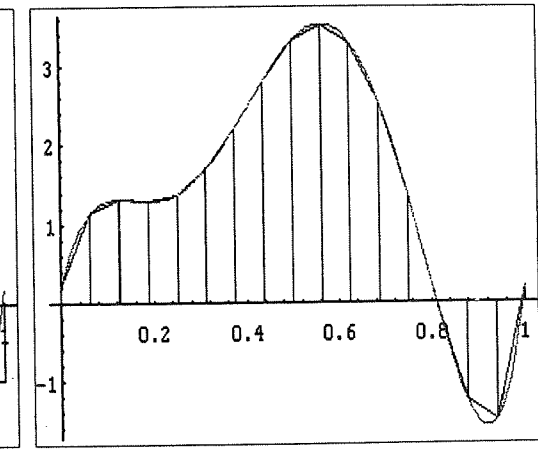
[그림 4.4a] leftrect[f(x), {x, 0, 1, 16}]



[그림 4.4b] rightrect[f(x), {x, 0, 1, 16}]



[그림 4.4c] midrect[f(x), {x, 0, 1, 16}]



[그림 4.4d] trapezoid[f(x), {x, 0, 1, 16}]

V. 결 론

수학교육의 목적은 수학적으로 사고하는 능력을 계발하는 것이라고 할 수 있다. 그러나 직관적인 사고로 개념을 이해시키려 하는 해석적인 방법은, 개념을 형상화하기가 쉽지 않아 학생들로 하여금 빨리 흥미를 잃게 한다. 수학교사들이, 비록 학생 스스로의 탐구와 사고활동을 통해 수학공부에 대한 내재적 동기를 갖게 하려고 발표와 토론을 많이 시킨다든지 사고를 요하는 질문을 자주 하려고는 하지만, 이를 달갑게 여기지 않는 학생들의 반응에 부딪혀 곧 좌절하곤 한다.

본 논문은 이러한 문제를 조금이나마 해소하고자 학생들이 스스로 참여하고 해결하는 수치해석적 방법을 도입하여 정적분으로의 실험적 접근을 모색하여 보았다. 컴퓨터를 활용하여 문제를 해결하고자 하는 수치해석적 방법은 최근 급격히 강화되고 있는 실정이다. 여러 가지 수리패키지를 적절히 활용하면, 교실현장은 생기가 넘치는 살아있는 교육의 장이 될 것이다. 그러한 가운데 학생들은 수학적 아이디어를 더욱 발전시키고 중요한 수학적 개념을 쉽게 이해하거나 스스로 발견하게 되는 것이다.

본 논문에서 고찰한 결과에 의하면, 현실에 맞는 교육과정의 개선이 필요하다고 할 수 있다. 현행 고등학교 수학 교육과정에서는 구분구적법을 통한 정적분의 도입에 있어서 좌종점 근사값이나 우종점 근사값을 사용하고 있다. 그러나 본 논문에서 밝힌 바와 같이 학생들로 하여금 충분히 이해할 수 있는 중간점 근사값이, 좌종점 근사값, 우종점 근사값, 심지어는 사다리꼴 근사값보다 더 정밀하다. 지필 환경에서는 구간의 중간점을 잡고 그의 함수값을 구하는 일이 쉽지 않았지만, 컴퓨터가 교실 현장까지 보급되고 있는 현실에서는 까다로운 계산에 구애받지 않으므로 Riemann 적분 이론으로의 접근을 쉽게 할 수 있는 중간점 근사값을 이용하는 수학 교육과정의 개선 노력이 필요하다고 할 수 있다. 더 나아가서는 Simpson 방식에 의한 접근도 가능한 것이다.

참 고 문 헌

- [1]. 강시중, 수학교육론, 교육출판사, 1985
- [2]. 김두호외 1인, 미분적분학, 청문각, 1992
- [3]. 류재구, 매스매티카, 크라운출판사, 1995
- [4]. 변정선, 구분구적법을 통해 본 정적분 개념, 이화여자대학교 교육대학원, 석사학위 논문, 1991
- [5]. 송수양, 적분법에 관한 연구, 고려대학교 교육대학원, 석사학위 논문, 1979
- [6]. Hae-Soo oh, Use of computer as a tool of Mathematics Education, Mathematics Education, Korean Mathematical society, Vol 10, 1992
- [7]. James Stewart, 수학교재편찬위원회 역, 미분적분학, 청문각, 1996
- [8]. R.L.Burden, 송만수 · 장건수 역, 수치해석학, 김영사, 1986
- [9]. R.G.Bartle/D.R.Sherbert, 김용태 역, 실해석학, 경문사, 1987
- [10]. Stephen Wolfram, Mathematica, Addison Wesley, 1994



< Abstract >

Experimental Approaches to Definite Integration with Numerical Integration*

Joa, Chang-Bo

Mathematics Education Major

Graduate School of Education, Cheju National University

Cheju, Korea

Supervised by Professor Kim, Chul-Soo

In this thesis, I tried to introduce definite integration to the curriculum of high school mathematics with numerical integration, which had been introduced with quadrature method. For this purpose, I used new experimental mathematics approaches, so-called investigation and examination.

In chapter II, I examined how much computers had been used in teaching mathematics. In chapter III, I presented the theoretical background of approximation integration within numerical integration. In chapter IV, I studied and compared various methods of numerical integration, and examined the relation between curvature of a curved line and numerical integration. In order to study more easily, I used some of computer programs.

I hope that this thesis will be a turning point in developing new teaching methods and improving curriculum of mathematics in high school.

* A thesis submitted to the Committee of the Graduate School of Education, Cheju National University in partial fulfillment of the Requirements for the Degree of Master of Education in August, 1997.

감사의 글

본 논문이 완성되기까지 바쁘신 가운데도 많은 시간을 할애하여 지도하여 주신 지도교수 김철수 박사님과 검토와 조언을 아낌없이 하여주신 수학과, 수학과와 모든 교수님들께 진심으로 감사를 드립니다.

또한 강의를 같이 받았던 동기, 후배 원생들을 비롯하여 학교수업 진행의 어려움 속에서도 교육과정을 무사히 마칠 수 있도록 배려하여 주신 남녕고등학교 교장·교감 선생님을 비롯한 동료 선생님께도 깊은 사의를 표합니다.

그리고 많은 어려움 속에서도 끊임없는 인내와 사랑으로 내조해준 아내, 건강하고 예쁘게 자라나는 사랑하는 혜정, 유철, 묵묵히 지켜보시는 존경하는 부모님께도 감사를 드리며, 조그마한 기쁨을 함께 나누고자 합니다.

1997년 8월

좌 창 보 드림