

碩士學位論文

神經 回路網을 利用한 效率的인 4色
配置 알고리즘에 關한 研究

濟州大學校 大學院

通信工學科



1994 年 6 月

神經 回路網을 利用한 效率的인 4色
配置 알고리즘에 關한 研究





指導教授 林 載 允

玄 海 辰

이 論文을 工學 碩士學位 論文으로 提出함

1994年 6月

玄 海 辰의 工學 碩士學位 論文을 認准함

 제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY
審査委員長 張 宰 成 
委 員 李 鎔 鶴 
委 員 林 載 允 

濟州大學校 大學院

1994年 6月

A Study on Efficient Four-Coloring Mapping Algorithm with Neural Network

Hae-Jin Hyun

(Supervised by professor Jae-Yun Lim)

A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT
OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF
MASTER OF ENGINEERING



DEPARTMENT OF TELECOMMUNICATION ENGINEERING
GRADUATE SCHOOL
CHEJU NATIONAL UNIVERSITY

1994. 6

목 차

Abstract	1
I. 서 론	2
II. 4색 배치 문제	5
2.1. 4색 배치 정의	5
2.2. 4색 배치 문제 해결 과정	7
III. 신경 회로망	9
3.1. 신경 회로망의 특징	9
3.2. 신경 회로망의 기본 구조 및 동작 원리	10
3.3. 신경 회로망의 수학적 모델	14
3.4. Hopfield의 에너지 함수를 이용한 4색 배치	15
3.4.1. 에너지 함수의 최적화 원리	16
3.4.2. 에너지 함수의 전역적 최소로의 수렴	17
3.4.3. 에너지 함수를 이용한 4색 배치 알고리즘	19
IV. 조정 정보 전달에 의한 4색 배치	21
4.1. 조정 정보 전달 기법	21
4.2. 조정 정보 전달에 의한 4색 배치	22
4.3. 조정 정보 전달에 의한 4색 배치 알고리즘	25

Abstract

In this paper we have proposed a method for solving a four-coloring problem using adjusted information transmission between adjacent neurons in Neural Network. These algorithms are based on McCulloch-Pitts binary neuron model Neural Network. If a map shares n regions, a $4 \times n$ neural array is used to color a map of n regions where each neuron as a processing element performs it. By programming these algorithms by a C-language in IBM PC 486-DX and adapting it to various examples, we have showed the ability of our system. If one neuron is selected among four neurons, the strength of other three neurons is weakened. So, by transmitting the information of selected neuron, adjacent neurons cannot share the same color.



제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

I. 서 론

4색 배치 작업은 평면상의 지도를 색칠하는데 있어서 어느 한 지역의 색이 지정되었을때 경계선으로 인접한 지역의 색은 같은 색이 배치되지 않도록 하는, 일종의 지역의 구분을 쉽게하기 위해 4색으로 배치하는 작업이다. 4색 배치 작업은 색칠할 색의 종류, 색칠할 지역의 수가 결정되면 작업을 시작하는데 만일 지도가 n 개의 지역으로 나누어져 있다면, 이를 구분하여 그 지역을 표현 하는데는 $4 \times n$ 개의 신경 배열을 필요로 한다. 색 배치 작업에 대한 예로는 1852년에 Francie Guthrie가 4색 배치 추측을 제시(Apple and Haken, 1977)한 후 Augustus De Morgan 등 많은 수학자들이 4색 배치 문제를 해결하기 위한 연구에 착수하였고, 그 중에 Authur Kempe, Peter Tait, Percy Heawood는 간단한 평면 도표를 네 가지 색으로 표현하려고 노력했다. 약 1백년 동안 수학적인 증명에 의한 이론들이 무성하게 생겨났으나 수학적인 수작업에는 한계가 있음을 알았고, 1976년 8월에는 컴퓨터의 힘을 빌려 미국의 수리적인 사회의 구성에 대해 4색 배치 작업을 했다.(Apple and Haken) 그들은 컴퓨터의 지원을 받아 4색 배치 문제를 증명했으나 순차적 방법에 기본을 두었기 때문에 광범위한 문제를 해결하기 위해서는 NP-완전 문제에 가까울 정도의 많은 시간이 소비되었다. 가령 그들의 계산 시간은 지역의 수가 n 이 되는 곳에서 n^2 에 비례했다.

지금까지의 디지털 컴퓨터는 순차적인 연산을 수행함으로써 검색 시간이나 메모리 용량, 처리 능력면에서 국한되었다. 이러한 기능상의 한계를 극복하기 위하여 병렬 처리 및 경로 해석에 대한 다중 처리의 문제가 중요시되었다. 그 후 신경망의 연산처리에 기본을 둔 수학적 모델의 제시(McCulloch and

Pitts,1943), 학습이론 제시(Hebb,1949), 신경회로망을 위한 Switching회로 제작(Widrow,1960), 뇌의 구조에 관한 이론(Rosenblitt,1961)과 Perceptron 이론 제시(Minsky and Papert,1969) 등 많은 발전을 보여왔으나 인공 신경망 계산에 대한 부정적 결과는 정부/산업체로부터 원조와 흥미를 더 받을 수 없게 되었고, 따라서 신경 회로망의 연구 규모 및 연구자의 수가 줄어들었다. 그러나, Amari, Cooper, Fukushima와 Grossberg와 같은 소수의 연구원들이 1960년대와 1970년대에 신경 회로망에 대한 연구를 계속하였고 Anderson과 Kohonen은 연상 메모리에 대한 수학적 모델을 발전시켰다.

1980년말에 Dahi(1987), Moopenn et al(1987), Thakoor et al(1987)가 map K-colorability problem에 대해 최초로 신경 회로망을 제시하였고 그 후신경 회로망에서 Hopfield의 에너지함수를 이용한 4색 배치 문제 해결 알고리즘이 제시되었다.(Yoshiyasu Takefuji and Kuo Chun Lee,1991) 그러나, 기존의 방법은 뉴런들의 연결 강도와 입력치 등 초기치에 대해 단순한 계산을 하는데도 많은 시간이 요구되었고, 대부분의 병렬 처리 문제들은 순차적인 알고리즘으로 모든 경우의 수에 대한 검색이 시스템의 처리 시간 중 대부분을 차지하게 되어 전체 처리 시간이 길어졌다. 이에 비해 각각의 분산된 뉴런들의 정보 처리를 이용한 신경 회로망에서 병렬 처리 문제 해결 시도는 각 뉴런의 처리 시간도 간단하고 기억 방식도 데이터가 쉽게 검색될 수 있도록 각각의 뉴런에 정보를 분산 저장하는 방식이어서 많은 학자들의 관심을 모으고 있다. 본 논문에서는 신경 회로망에서 2진 뉴런에 기초하여 인접한 뉴런들간의 조정 정보 전달에 의해 4색 배치 문제를 해결하는 효율적인 방법을 제시한다. 한 지역을 나타내는 네 개의 뉴런 중 하나가 선택되면 나머지 세 개는 자동으로 감쇠시키고 또한 선택된 뉴런의 정보를 연결망을 통해 인접 뉴런에게 전달, 인접한 지역에는 같은 색이 나타나지 못하도록 하면서 다음 지역의 색을 결정할 때 인접 뉴런들간

의 출력 정보를 효율적으로 활용할 수 있게 했다.

본 논문에서는 4색 배치 문제를 고찰하고 Hopfield의 에너지 함수를 이용한 기존의 4색 배치 알고리즘을 설명하고 그 기법을 달리하여 인접한 뉴런들간의 조정 정보 전달에 의해 4색 배치 문제를 해결하는 효율적인 알고리즘을 기술한다.

II. 4색 배치 문제

이 장에서는 많은 수학자들이 4색 배치 문제를 증명하는 과정에서 정립된 4색 배치의 기본 정의와 4색 배치를 위해 지도가 갖추어야 할 기본 조건들을 기술하고, 약 1세기반 전에 4색 배치 추측이 제시된 후, 4색 배치 문제를 해결하는 과정을 기술한다. (Kempe, 1977)

2.1. 4색 배치 정의

이 절에서는 4색 배치의 기본 정의와 4색 배치 작업을 위해 지도가 갖추어야 할 기본 조건들을 기술한다.



[정 의] 4색 배치란 지면 혹은 평면상에 그려진 지도에서 지역의 구분을 쉽게 하기 위한 색 배치 작업으로서 인접한 지역에는 같은 색이 나타나지 않도록 색 배치를 해야 한다.

[조건 1] '평면'의 개념을 가진다. 즉, 구면체가 아닌 평면상에 구성된 지도에 색 배치를 해야 한다.

[조건 2] '이웃'의 개념을 가진다. 즉, 지역들이 어떤 단일 지점에 인접해서
 는 안되고 경계선을 따라 인접해야 한다.

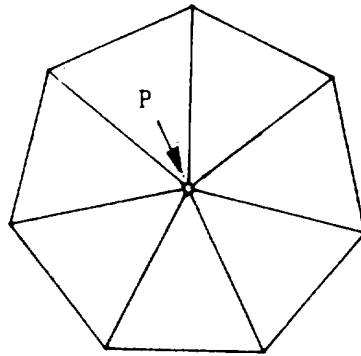


Fig.1 A planar map with seven neighboring regions

만일, Fig.1에서 단일 지점 P에 인접한 지역들을 '이웃'이라고 생각한다면
 위의 지도는 7개 지역에 각각의 다른 색이 요구된다.

[조건 3] '연결'의 개념을 가진다. 왜냐하면 Fig.2와 같이 공간상에서 지역
 들이 떨어져 있으면 그 사이의 공간을 칠할 색이 하나 더 필요하기 때문이다.

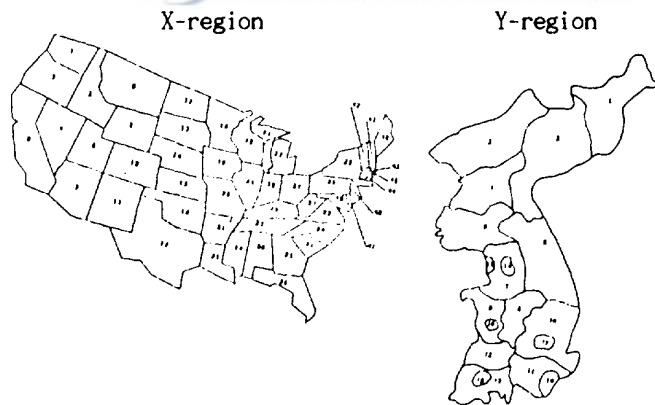


Fig.2 A planar map divided into X-region and Y-region

한편, Fig.3에서 보는 바와 같이 삼색-채색 가능성은 불합리하다.

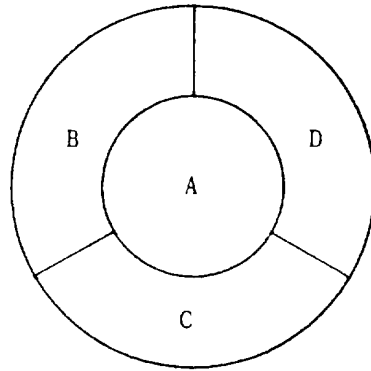


Fig.3 Absurdity of three-chromatic map

또한 Apple 와 Haken(1977)이 다섯-채색의 불합리성을 보임으로써 4색 배치 문제는 유용성을 가진다.

2.2. 4색 배치 문제 해결 과정

1852년에 Guthrie에 의해 제시된 4색 배치 추측은 1870년대에 kempe가 4색 배치 추측은 사실임을 입증하려고 노력하면서 많은 수학자들의 관심을 끌었다.

kempe는 4색 배치 이론은 정상 지도속에서만 가능하고 이것은 모든 지도에 적용할 수 있다고 생각하여 다음과 같이 정상 지도를 정의했다.

[정상 지도] '어쩔 수 없는' 지형, '축소' 가능한 지형의 세트이어야 한다.
('어쩔 수 없는' 지형의 세트란 4색 배치 가능한 '이웃' 지형의 세트이고, '축소 가능한' 지형의 세트란 다섯 채색 지도의 한 부분일 수 없는 지형들의 배열이다.)

그후 정상 지도를 증명하려고 많은 수학자들이 노력했는데, 1913년 George D. Birkhoff는 Kempe의 축소 기술을 발전시켜 넓은 지형에서의 축소 가능성을 보여주었으며, Philip Franklin은 22개 지역보다 더 적은 지역을 가지는 지도에서, 1950년대 쯤에는 36개국보다 더 적은 지역을 가지는 지도에서는 4색 배치가 가능함을 보여주었다. 1960년대에는 '축소 가능한' 지형에 대해서는 이해가 되었으나, '어쩔 수 없는' 지형의 세트를 구성하지는 못했다. 1970년 쯤에는 4색 이론에 대한 증명을 찾는데 매우 비관적이었다. 약 1백 년 전에 이 문제가 공식화된 이래 매우 관심을 끄는 문제로 받아들여졌고 그동안 간단한 증명들은 많았으나, 4색 배치 이론에 대해 정확한 증명을 이끌어 내는 수학자는 없었다. 다시말하면 4색 배치 이론에 대해 수학적으로 증명을 하는데는 한계가 있음을 암시했다. 1972년에 Apple과 Haken이 연구를 시작했을때 증명에 대한 강력한 도구의 필요성을 느꼈으며, 이때부터 지형의 리스트를 기본 입력 데이터로 컴퓨터 프로그램을 처음 사용했다. 1974년 말에 지리학적으로 좋은 지형의 세트가 있다는 것을 증명했고, 이 세트를 기초로 정확한 세트를 구성하려고 순서를 정했다. 4색 배치 이론을 증명함에 있어 설계한 이 프로시저들은 매우 중요했다. 1975년에 장애물-자유 지형을 소개하기 위해 프로그램을 수정했고 1975년 여름에 축소 가능하고 장애물-자유 지형이 예상되는 '어쩔 수 없는' 지형이 있을 것 같아 이 부분에 대한 연구를 계속하다가 '축소 가능한' '어쩔 수 없는' 지형의 세트를 구성해 1976년에 Apple과 Haken이 컴퓨터의 지원을 받고 4색 배치 작업을 했다. 그러나 이들의 문제 해결 방법도 광범위한 데이터를 해결하기에 데이터 처리 방법과 계산 시간에 한계가 있음을 느꼈다.

III. 신경 회로망

이 장에서는 신경 회로망의 동작 원리속에서 효율적인 4색 배치를 해결하기 위해서 신경 회로망의 특징, 기본 구조 및 동작 원리를 기술(Nelson and Illingworth, 1992)하고 4색 배치를 위한 신경 회로망의 수학적 모델, 신경 회로망에서 기존의 4색 배치의 예로써 조합의 최적화 함수, 즉 Hopfield의 에너지 함수를 이용하는 방법과 그 알고리즘을 고찰한다.

3.1. 신경 회로망의 특징

신경 회로망이란 신경 조직에서 착안하여 모델화한 정보처리 시스템으로서 단순한 소자들의 병렬, 분산 연결 구조를 가지고 있으며, 외부로부터 받아들이는 입력에 의하여 동적 반응을 일으킴으로써 필요한 출력을 생성시키는 것이다. 신경 회로망의 범주에 속하는 모델들이 여러 가지 있으나 이들의 공통적인 특징을 살펴보면 다음과 같다.

첫째, '병렬 분산 처리 방식'으로 데이터를 처리한다.

디지틀 컴퓨터의 순차적인 정보 처리 방식과는 달리 수많은 뉴런들에 분산 저장되어 있는 정보가 대규모 병렬 연산에 의해 즉각적으로 처리된다.

둘째, '연산 기억 능력'을 가진다.

기록된 데이터와 유사한 데이터가 들어와도 확률적으로 근사화하여 용도에

적합하게 사용한다. 이른바 신경 회로망 기억 방식의 특징이라 할 수 있다.

셋째, '고장 극복 능력'을 가진다는 점이다.

인간의 뇌가 매일 수 천개의 신경 세포를 잃어도 일상적인 생활을 하는데 거의 불편을 느끼지 않는 것에 비유하여 신경 회로망은 H/W상의 약간의 고장에 대해서 덜 민감한 특징이 있다.

넷째는 신경 회로망에서 가장 중요한 특징인 '학습 능력'인데, 신경 회로망에서 학습이란 주변으로부터의 자극과 응답에 대한 경험적 정보를 일반화하고 그 데이터로부터 신경 회로망 내부에 지식 기반을 형성, 입력 정보에 대해 적절하고 융통성 있는 출력을 생성하도록 하는 것이다. 학습의 궁극적인 목표는 원하는 출력과 가중치를 계속 바꿔가면서 형성된 현 출력과의 오차를 최소화하는 것이다. 다시말하면, 학습에는 충분한 훈련이 요구된다.

3.2 신경 회로망의 기본 구조 및 동작 원리



신경 회로망의 기본 소자로는 신경세포(Neuron)와 연결부(Synapse)가 있고, 그 이외에도 많은 기본 요소로 이루어진다.

신경세포(Neuron)은 뉴론 혹은 PE(Processing Element)라고도 하며, 노드로 표시된다. 인접한 많은 신경 세포로부터의 입력 신호와 입력에 대한 가중치를 곱한 신호들을 더하는 합산 기능이 있고, 이 신호들을 전달 함수를 통과시키며 문턱값의 크기와 비교, 판단하여 단 하나의 출력(正이다, 否이다)을 생성한다. 즉 수많은 입력 신호로부터 단 하나의 출력 신호를 얻는다.

연접부(Synapse)는 노드와 노드 사이를 말하며, 연결 세기라고도 한다. 뉴론

들간의 정보 전달을 담당하는데, 이때 이 연결 세기에는 한 뉴론에서 들어온 정보를 다음 단계의 뉴론에게 전달하는 과정에서 무게, 즉 가중치를 가지고 흥분성 또는 억제성 신호를 다른 세포에게 전달하는 기능이 있다.

일반적인 신경 회로망의 기본 구조가 Fig.4에 나타나 있다.

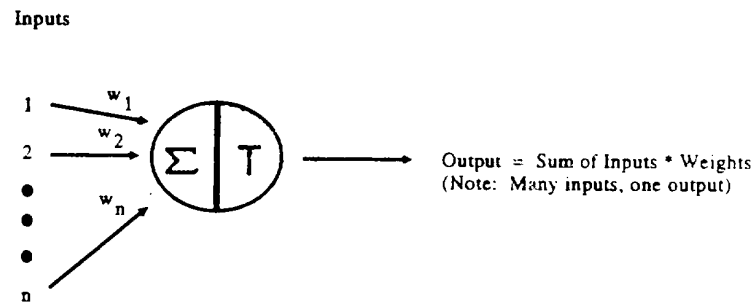


Fig.4 A Simple Neural Network (with summation function, transfer function, weighting factors, inputs and outputs)

그리고 층 결합에는 입력 신호를 발생하고 보호하는 입력층, 출력이 발생되는 출력층 그리고 외부 환경과 아무런 접촉이 없는데 신경회로망 내부에 존재하기에 'Hidden Layer'라 부르는 중간층으로 구별되고 층 결합 형태에 따라 신경 세포(PE)의 출력이 같은층 또는 전층의 입력으로 사용되지 않으면 순방향망 (Feedforward Network), 출력들이 이전의 층 또는 동일층으로 귀환되면 귀환망 (Feedback Network)으로 구분하고 폐회로를 이루는 귀환망을 순환 시스템 (Recurrent System)이라 한다.

층 결합에는 여러 가지의 형태가 있으나 그 기본적인 결합은 Fig.5와 같다.

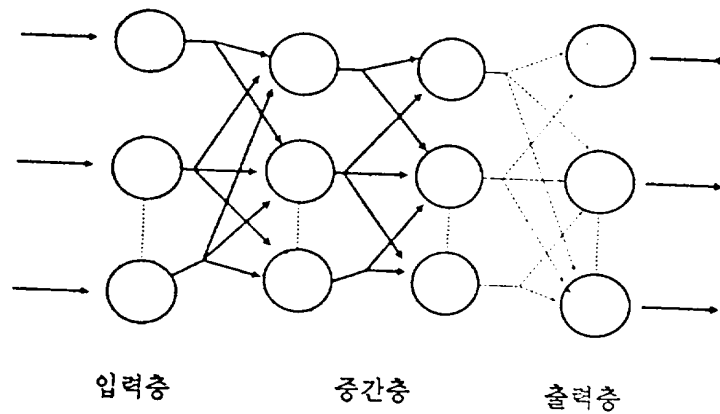


Fig.5 Combining Layers

일반적인 신경 회로망을 아날로그 회로로 구성하면 Fig.6과 같다

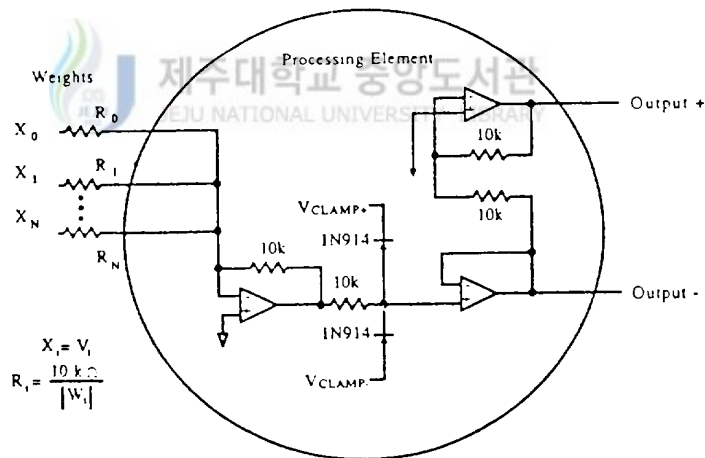


Fig.6 A Simple Analog Circuit

인간의 뇌세포 활동과 신경 회로망의 동작 원리를 비교하면 다음과 같다.

【인간의 뇌세포 활동】

- ① 상황이 발생한다.
- ② 뇌 세포가 감지한다.
- ③ 일반적인 활동을 주시한다.
- ④ 반응을 감시한다.
- ⑤ 자기 스스로 체계를 갖춘다.
- ⑥ 생각한다.
- ⑦ 일반화한다.
- ⑧ 동작한다.

【신경 회로망의 동작 원리】

- ① 다수의 입력 신호가 있다.
- ② 이 입력신호는 시냅스를 통하여 뉴런에 연결된다.
이때, 시냅스는 가중치를 실어 입력 신호를 나른다.
- ③ 시냅스를 통해 들어온 신호들을 합산한다.
- ④ 합산된 값을 신경망 고유의 전달 함수의 문턱치값과 비교한다.
- ⑤ 전달 함수 특성에 의하여 출력을 발하든지 그만두든지 한다.
- ⑥ 출력을 낸다.
- ⑦ ① ~ ⑥ 의 활동을 하는 동안 뉴런에 지역 메모리를 두어 바로 전의 결과를 저장하며 일반적인 학습 규칙을 만들고 이 학습 규칙에 의해 가중치를 변경시킨다.
- ⑧ 원하는 출력을 발생한다.

3.3. 신경 회로망의 수학적 모델

McCulloch-Pitts(1943)에 의해 생물학적 연산 처리에 기본을 둔 수학적 모델이 제시되었다. 인공 신경 회로망의 수학적 모델은 두 가지 요소로 구성되는데 이를 뉴런과 시냅스라 한다. 한 뉴런으로부터 전달된 출력 신호는 시냅스 연결을 통하여 다른 뉴런으로 전달된다. 각 뉴런의 입력 신호의 상태는 시냅스 연결의 세기가 되는 가중치와 다른 뉴런으로부터 전달되는 입력 신호의 선형적인 합에 의해 결정된다.

본 논문에서의 병렬 알고리즘은 식 (1)과 같은 McCulloch-Pitts의 2진 뉴런 모델의 원리를 사용한다.

$$U_i = \sum_k W_{ki} V_k \quad (1)$$

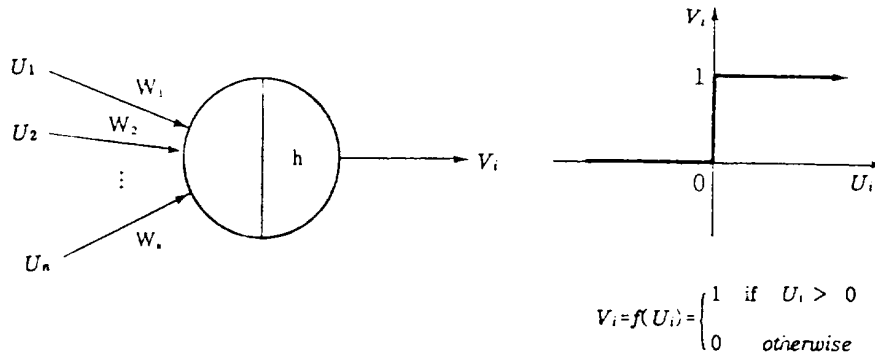
식 (1)에서 U_i 는 i -번째 뉴런의 입력이고 V_k 는 k -번째 뉴런의 출력이며 W_{ki} 는 k -번째 뉴런으로부터 i -번째 뉴런으로 전달되는 시냅스 연결의 세기이다. 만일 입력 $U_i > 0$ 이라면 McCulloch-Pitts의 출력 함수 $V_i = f(U_i) = 1$ 로 주어지고, 그렇지 않으면 0이다.

McCulloch-Pitts의 2진 뉴런 입/출력 함수는 식 (2)와 같다.

$$V_i = f(U_i) = \begin{cases} 1, & \text{if } U_i > 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2)$$

여기서, V_i 와 U_i 는 각각 i -번째 뉴런의 출력과 입력이다.

아래 Fig.7(a)는 McCulloch-Pitts의 2진 뉴런 모델이고 Fig.7(b)는 그에 대한 응답 함수이다.



(a) binary neuron model

(b) Response function

Fig.7 McCulloch-Pitts binary neuron model

3.4. Hopfield의 에너지 함수를 이용한 4색 배치

조합의 최대 활용 문제에 대한 첫 신경 회로망은 1985년에 Hopfield와 Tank에 의해 소개되었다. 그들은 상호 결합형 신경 회로망으로 조합형 최적화와 수렴 속도, 안정성을 해결하기 위하여 에너지 함수의 개념을 도입하였다. 이 절에서는 에너지 함수가 전역적 최적해로 수렴하는 원리와 에너지 함수를 이용한 4색 배치 알고리즘에 대해 고찰한다.

3.4.1. 에너지 함수의 최적화 원리

Hopfield와 Tank는 미리 정의된 에너지 함수 E 를 사용하여 식 (3)과 같은 2차 형식의 안정된 신경 회로망의 안정 에너지를 구하였다.

$$E = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N G_{ij} V_i V_j + \sum_{i=1}^N V_i I_i \quad (3)$$

i, j 는 뉴런의 번호 V_i 는 i -번째 뉴런의 출력 G_{ij} 는 i -번째 뉴런과 j -번째 뉴런 사이의 컨덕턴스 I_i 는 i -번째 뉴런의 일정값의 바이어스
--

신경 회로망에서 각 뉴런의 상태는 그 자신과 다른 뉴런의 상태에 의해 영향을 받는다. 시냅스의 상호 연결의 세기는 실제로 신경 회로망 시스템의 활성도를 결정한다. 뉴론 방정식은 대응하는 뉴런의 상태가 다른 뉴런들에 의해 어떻게 영향을 받는지에 대해 신경 활성화를 표현한다. 시냅스 연결과 시냅스 연결의 세기는 뉴론 방정식에 의해 주어진다. Hopfield는 i -번째 뉴런의 뉴론 방정식을 식 (4)와 같이 체계화 시킨다. (Hopfield and Tank, 1985)

$$\frac{dU_i}{dt} = -\frac{U_i}{\tau} - \frac{\delta E}{\delta V_i} \quad (4)$$

식 (4)에서 입력 U 는 계산된 시냅스 연결의 세기 ΔU 에 의해 조정되어 출력 V 가 계산된다. 식 (4)의 목적은 ΔU 를 효율적으로 조정함으로써 보다 빠른 방법으로 출력 V 행렬을 구하는데 있다.

여기서 출력은 연속적인 함수인 식 (5)의 시그모이드 함수에 따른다.

$$V_i = f(U_i) = \frac{1}{2}(\tanh(\lambda_0 U_i) + 1) \quad (5)$$

(λ_0 는 sigmoid함수의 이득)

3.4.2. 에너지 함수의 전역적 최소로의 수렴

식 (4)에서 감소항 $(-\frac{U_i}{\tau})$ 의 사용은 때때로 산정 에너지를 증가시킨다. (Yoshiyasu Takefuji and Kuo Chon Lee, 1991)

뉴턴 방정식은 어떠한 에너지 함수가 주어지든지간에 그것을 항상 단조롭게 감소시키고 뉴턴 방정식에 의해 시스템의 상태는 어떠한 지역적 최소로 수렴되는 것이 보장된다. (Hopfield and Tank, 1985)

뉴턴 방정식은 McCulloch-Pitts의 2진 뉴런에 대해서도 $\frac{dU_i}{dt} = -\frac{\delta E}{\delta V_i}$ 로 주어지는 한 에너지 함수 E 를 단조롭게 감소시킨다는 결론을 내릴 수 있다. (Hopfield and Tank, 1985)

경계선을 중심으로 인접 지역이 각기 다른색을 갖는다는 조건에서 고려해보면 기본 에너지 함수는 다음과 같이 주어진다.

$$E = \frac{A}{2} \sum_{X=1}^n \left(\sum_{i=1}^4 V_{X_i} - 1 \right) + \sum_{X=1}^n \sum_{Y=[(*,X)]} \sum_{i=1}^n d_{XY} V_{X_i} V_{Y_i} \quad (6)$$

$$\left[\begin{array}{l} A, B \text{는 상수} \\ V_{X_i} : X \text{지역에서 } i\text{-번째 뉴런의 출력} \end{array} \right]$$

여기서 X 와 Y 가 서로 인접되었다면 d_{XY} 는 1이고 그렇지 않으면 0이다. 인접 매트릭스는 $n \times n$ 배열이고 d_{XY} 는 단일 요소이다. 그 첫번째 항은 단 하나의 뉴런 출력이 영이 아니게 하는 신경 배열에서 열 구속에 해당한다. 마지막 항은 지역들간의 경계 억제를 표시한다.

X 지역의 i -번째 색에 대한 뉴톤 방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$\frac{dU_{X_i}}{dt} = - \frac{\delta E}{\delta V_{X_i}} \quad (7)$$

식 (6)와 (7)은 다음 식에 의해 X 지역의 i -번째 색깔에 대한 방정식을 식 (8)과 같이 일반화 시킨다.

$$\frac{dU_{X_i}}{dt} = - A \left(\sum_{j=1}^4 V_{X_j} - 1 \right) - B \sum_{Y \in \{(*, X)\}} d_{XY} V_Y \quad (8)$$

X 지역의 i -번째 색에 대한 마지막 뉴톤 방정식은 식 (9)와 같이 체계화된다.

$$\begin{aligned} \frac{dU_{X_i}}{dt} = & -A \left(\sum_{j=1}^4 V_{X_j} - 1 \right) - B \left(\sum_{Y \in \{(*, X)\}} d_{XY} V_Y \sum_{k=1}^n d_{YK} \right) \\ & + C \cdot h \left(\sum_{j=1}^4 V_{X_j} \right) \left(C_1 \sum_{K=1}^n d_{XK} + C_2 \frac{\sum_{K=1}^n \sum_{Y=1}^n d_{XY} d_{YK}}{\sum_{K=1}^n d_{XK}} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

C, C_1, C_2 는 상수이고 두번째 항의 계수는 표준화된다. 마지막 항은 $X = 0$ 이라면 $h(X)$ 가 1인, 그렇지 않으면 0인 hill-climbing항이다

그것은 모든 V_{X_j} 가 0일때만 흥분성의 일을 한다. hill-climbing항은 항상 시스템의 상태를 지역적 최소는 피하고 전역적 최소에 수렴하게 한다.

3.4.3. 에너지 함수를 이용한 4색 배치 알고리즘

Hopfield가 제시한 에너지 함수를 이용한 4색 배치 알고리즘을 기술하면 다음과 같다.

[과정 1] $t = 0$, $\Delta t = 0$, $A = B = C = C_1 = C_2 = 1$ 로 초기화 한다.

[과정 2] $X = 1, \dots, n$, $i = 1, 2, 3, 4$ 인 곳에서 $U_{X_i}(t)$ 의 초기값을 임의 추출한다.

[과정 3] $X = 1, \dots, n$, $i = 1, 2, 3, 4$ 인 곳에서 McCulloch-Pitts의 2진 함수를 기초로 하여 $V_{X_i}(t)$ 의 값을 계산한다.

$$V_{X_i}(t) = f(U_{X_i}(t)) = \begin{cases} 1, & \text{if } U_i > 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

[과정 4] $\Delta U_{X_i}(t)$ 를 계산하기 위하여 활동 방정식을 사용한다.

$X = 1, \dots, n$, $i = 1, 2, 3, 4$ 에 대하여

$$\begin{aligned} \Delta U_{X_i}(t) = & -A \left(\sum_{j=1}^4 V_{X_j}(t) - 1 \right) - B \left(\sum_{Y=1(\neq X)}^n d_{XY} V_{Y_i} \sum_{K=1}^n d_{YK} \right) \\ & + C \cdot h \left(\sum_{j=1}^4 V_{X_j} \right) \left(C_1 \sum_{K=1}^n d_{XK} + C_2 \frac{\sum_{K=1}^n \sum_{Y=1}^n d_{XY} d_{YK}}{\sum_{K=1}^n d_{XK}} \right) \quad (10) \end{aligned}$$

[과정 5] Euler의 방법을 사용하여 $U_{X_i}(t+1)$ 를 구한다.

$X = 1, \dots, n$, $i = 1, 2, 3, 4$ 에 대하여

$$U_{X_i}(t+1) = U_{X_i}(t) + \Delta U_{X_i}(t) \Delta t$$

[과정 6] t 를 1씩 증가시키면서 해를 구한다.

$((t + 15) \bmod 25) < 5$ 이고 $t \geq 60$ 이면 $C = 5$, 그렇지 않으면 1이다.

$\Delta U_{x1}(t), \Delta U_{x2}(t), \Delta U_{x3}(t), \Delta U_{x4}(t)$ 중 최소한 하나가 $X = 1$.

\dots , n 에 대해 0이라면, 그때 프로시저를 종결하며 그 이외에는

[과정 2]로 간다.

에너지 함수를 이용한 최적화 알고리즘에서는 지역적 최적해가 아닌 전역적 최적해를 얻기 위한 보장 및 그 수렴 속도가 주로 에너지 함수의 가중치 파라메타와 그 뉴런의 초기 출력 설정에 의존한다는 것을 알 수 있다. Hopfield의 신경 회로망과 같은 결정론적 방법은 수렴 속도가 빠르며 초기값을 잘 설정하면 전역적 최적해를 얻을 수 있으나 지역적 최적해를 단났을 때 이를 헤어날 수 없는 문제점이 있다. 최적화용 신경 회로망에서 각 뉴런의 출력값으로 표현되는 에너지 함수는 여러 개의 국소점을 가지는 다중극점 함수일 수 있다. 이러한 에너지 함수에서는 전역적 최적해를 찾을 수 있으면서도 수렴 속도가 빠른 알고리즘의 개발이 요구된다.

그리고 Hopfield의 에너지 함수를 이용하여 최적해를 구하는 방법은 뉴런의 초기 출력 설정이 경험적이며 해의 성격이 정의된 에너지 함수에 크게 의존한다. 지금까지 발표된 최적화 신경 회로망에 관한 연구들은 주로 전역적 최적해로의 수렴과 수렴 속도의 개선을 위하여 에너지 함수의 가중치 파라메타 조정 등을 시도하고 있으며, 뉴런의 초기 출력에 의한 수렴 속도와 해를 구할려는 방법은 찾아보기 힘들다.

IV. 조정 정보 전달에 의한 4색 배치 기법

이 장에서는 효율적인 4색 배치 작업을 수행하기 위해서 뉴런의 정보를 인접 뉴런에 전달하는 조정 정보 전달 기법과 그 기법을 다섯 지역 지도의 예에 적용하여 조정 정보 전달에 의한 4색 배치 기법의 원리를 직접 살펴보고, 조정 정보 전달에 의한 4색 배치 알고리즘을 기술한다.

4.1. 조정 정보 전달 기법

4색 배치 문제는 지도에서 4색을 이용하여 지역의 구분을 쉽게 하기 위한 색 배치 작업이다. 만일 지도가 n 개의 지역으로 나누어져 있다면, 이를 구분하여 그 지역을 표현 하는데는 $4 \times n$ 개의 신경 배열을 필요로 한다. 첫 지역의 네 개의 뉴런중 하나가 선택되면 나머지 세 개의 뉴런을 자동 감쇠시키고 또한 선택된 뉴런의 정보를 인접 뉴런에게 전달하여 인접한 지역에는 같은 색이 나타나지 못하도록 하는 방법으로 주어진 n 지역에 대한 4색 배치 작업을 끝낸다.

색 배치 작업을 위해 빨강, 파랑, 노란, 녹색에 대한 뉴런 표현을 각각 1000, 0100, 0010, 0001이라는 뉴런으로 표현하자. 한 지역의 단색 할당을 위해 4개의 뉴런이 요구되었다. 그러므로 n 지역 지도에 색 배치 작업을 하기 위해서는 $4 \times n$ 2차원 신경 배열이 필요하다. 그리고 인접한 지역에 각기 다른 색을 칠하기 위해서는 인접 지역에 대한 인접 정보가 필요하다. 인접 정보는 경계선으로 구분이 되는 지역들을 말하는 것으로 지역과 지역이 인접해 있으면 '1'

로, 그렇지 않으면 아무런 표시도 하지 않는 방법으로 인접 지역의 정보를 D 행렬로 표시한다. 각 지역의 번호를 지정하여 1번 지역, 2번 지역,..... n번 지역으로 구분하자. 이러한 데이터를 기본 입력 데이터로 받아 무작위로 n지역에 대한 색 배치 작업을 수행한다. 먼저 1번 지역의 색을 결정하는데 값이 가장 큰 뉴런을 선택하여 그 지역의 색으로 결정한다. 만약에 1번 지역에 선택된 값이 음의 값이라면 양의 값으로 보정하고, 나머지 뉴런들은 선택에서 제외시킨다. 1번 지역에서 선택된 뉴런은 인접 지역에 정보를 전달하여 인접 지역의 색을 결정할 때 1번 지역에서 선택된 뉴런은 제외시킨다. 1번 지역에서는 4개의 뉴런을 가지고 색을 결정하지만 인접 지역에서는 나머지 3개의 뉴런을 가지고 색을 결정하게 된다. 이와 똑같은 방법으로 3번 지역,..... n번 지역의 색을 결정한다. 정보 전달을 받은 어떤 지역은 2개의 뉴런으로, 어떤 지역은 인접 지역에서 전달받은 정보에 의해 색 배치를 위한 작업을 따로 하지 않아도 자동으로 색이 결정된다.

4.2. 조정 정보 전달에 의한 4색 배치 기법



조정 정보 전달에 의한 4색 배치 기법을 다섯 지역 지도의 예에 적용해 보면 다음과 같다.

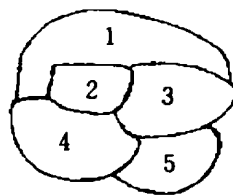


Fig.8 A five-region map

Fig.8은 4색 배치 작업을 하기 위해 예를 든 다섯 지역 지도로서, 각 지역을 번호로 표시하였다.

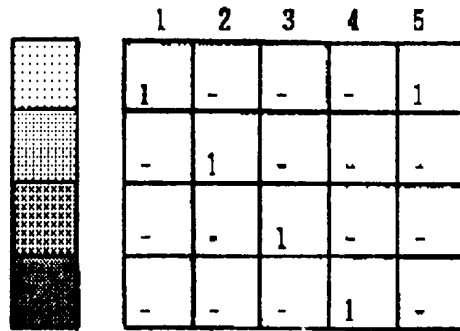


Fig.9 Neural representation for the five-region map

Fig.9은 다섯 지역에 대해 착색 작업을 하는데 필요한 4 × 5 신경 배열이다. 행렬값 '1'은 그 지역에 색이 지정된 것을 나타낸다.

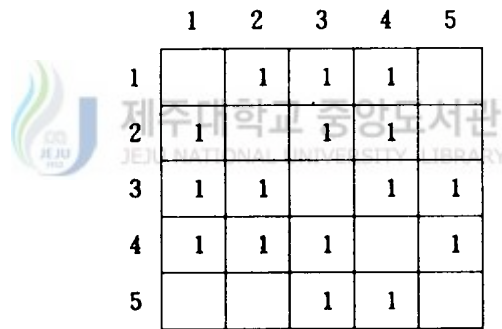


Fig.10 An adjacency matrix of the map

Fig.10는 다섯 지역에 대해 경계 정보를 나타내는 인접 행렬도이다. 표 밖에 번호들은 각 지역의 번호이며, 표 안에 '1'은 각 지역과 지역간에 인접해 있음을 나타내는 인접 정보이다.

하나의 지역에는 네 가지 색을 표현할 수 있는 네 개의 뉴런이 있다. 먼저 첫번째 지역의 네 개의 뉴런중 출력값이 가장 큰 뉴런을 추출하고 나머지 세 개의 뉴런은 선택에서 제외시키며 우선 첫번째 지역의 색을 결정한다. 이때 첫번째 지역에 선택된 뉴런이 음의 값을 갖는다면 양의 값으로 보정하고 비선택된 나머지 세 개의 뉴런은 자동으로 감쇠된다. 또한 선택된 뉴런의 정보를 인접 뉴런에게 전달하여 인접한 지역에는 같은 색이 나타나지 못하도록 한다.

1번 지역에 첫번째 뉴런이 선택되었으므로 1번 지역과 인접한 2번, 3번, 4번 지역의 첫번째 뉴런은 조정 정보 전달로 그 다음 선택에서 제외되는 정보를 전달받게 된다. 그 다음의 2번 지역에서는 4개의 뉴런 중 첫번째 뉴런을 제외한 나머지 3개의 뉴런중에서 출력값이 가장 큰 뉴런이 선택되고 같은 방법으로 3, 4, 5번 지역의 뉴런이 결정이 되면 다섯 지역 지도의 4색 배치 작업은 끝난다.

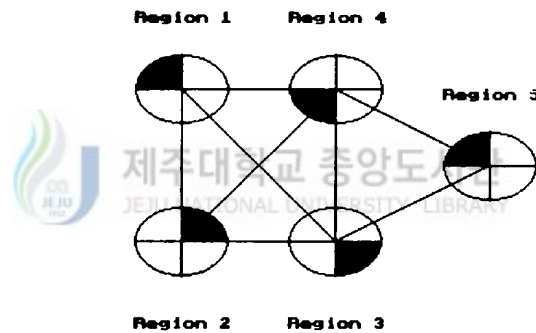


Fig.11 Neuron connection of five-region

Fig.11은 예를 든 다섯 지역 지도에 대해 인접 정보를 기본 입력 데이터로 C 언어로 프로그램하여 조정 정보를 전달하는 과정을 시뮬레이션한 다섯 지역의 뉴런 결선도이다. 각 지역들간의 결선은 인접 여부에 따라 인접 지역일 경우는

결선되고, 그렇지 않으면 결선되지 않는 방법으로 각 지역들간의 인접 정보에 따른 뉴런들간의 결선 상태를 나타내었다. 1번 지역에는 좌측 상단의 뉴런이, 2번 지역에는 1번 지역의 좌측 상단의 뉴런을 제외한 나머지 3개의 뉴런중에 우측상단의 뉴런이, 같은 방법으로 3번 지역에는 좌측 하단의 뉴런이, 4번 지역에는 우측하단의 뉴런이 5번 지역에는 좌측 상단의 뉴런이 결정되는 과정을 뉴런 결선도를 이용하여 입증해 보였다.

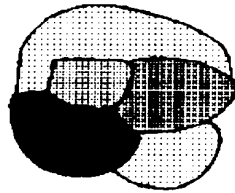


Fig.12 A four-colored map

Fig.12는 Fig.8의 다섯 지역 지도에 대해 4색 배치가 완성된 지도이다.

4.3. 조정 정보 전달에 의한 4색 배치 알고리즘



본 논문에서 제시한 4색 배치 문제에 대한 알고리즘은 다음과 같다.

[과정 1] 작업할 지역의 수는 n 이며 이를 변수 x 로 표시하고, 각 지역의 뉴

런은 변수 i 로 표시한다.

[과정 2] 인접 지역에 대한 정보로서 d 인접 행렬을 산출한다. 시스템에서는

Fig.11과 같은 뉴런들간의 결선도를 산출한다.

[과정 3] $x=1, \dots, n, i=1, \dots, 4$ 인 곳에서 입력 $U_{xi}(t)$ 의 초기값은 임

의의 값으로 한다.

[과정 4] x 번째 지역의 색을 정하기 위하여 U_{xi} 에서 4개의 뉴런중 최대값을 선택하고 나머지 값은 음의 값으로 보정한다. 이때 나머지 뉴런들은 색 결정에서 자동으로 제외된다.

[과정 5] $x = x + 1, \dots, n, i = 1, \dots, 4$ 에 대해 인접 지역일 경우 인접 뉴런의 i 번째 색의 U_{xi} 의 값을 음으로 보정한다.

[과정 6] $x=1, \dots, n, i=1, \dots, 4$ 에 대해 $V_{xi}(t)$ 의 값은 다음과 같은 맥클로치-피츠의 입/출력 함수의 원리에 따라 계산한다.

$$V_{xi}(t) = f(U_{xi}(t)) = \begin{cases} 1, & \text{if } Max \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

[과정 7] 현재 작업중인 지역 x 가 작업할 지역 n 보다 작으면 [과정 4]로 가고, $x=n$ 일 때 n 지역에 대한 4색 배치 알고리즘을 종료시킨다.



V. 시스템 구성도 및 시뮬레이션 결과

본 알고리즘의 유용성을 입증하기 위하여 IBM PC 486DX상에서 C언어를 사용, 프로그램하여 이를 대한민국의 19개 행정 지역 지도와 미국의 48개 주 지도에 적용함으로써 이 시스템의 성능을 보였다.

5.1. 시스템 구성도

이 시스템의 구성도는 Fig.13과 같다.

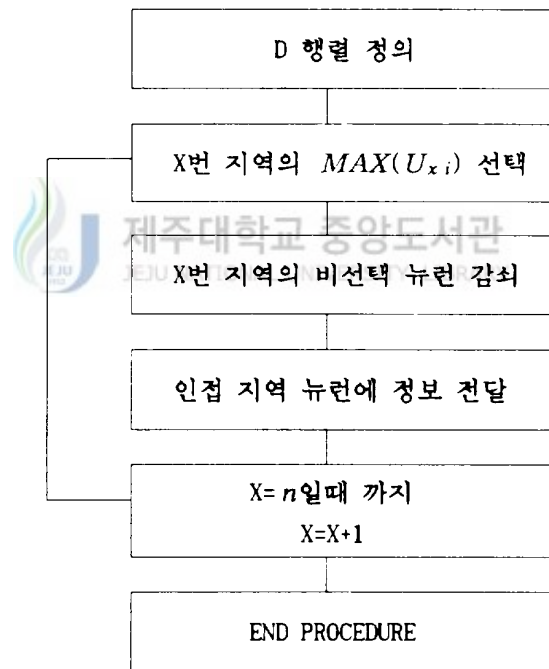


Fig.13 Flowchart of four color mapping algorithm

5.2. 시뮬레이션 결과

■ 대한민국의 19개 행정 지역 지도에 대한 4색 배치 문제

Fig.14는 대한민국의 19개 행정 지역 지도이다.




Fig.14 A 19-district map of KOREA

$$D(X,X) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1,3,4,5,6 \\ 2,4 \\ 2,3,5 \\ 2,4,6,7 \\ 2,5,7,8,10 \\ 5,6,8,9,14,15 \\ 6,7,9,10,12 \\ 7,8,12,16 \\ 6,8,11,12,17 \\ 10,12,13,19 \\ 8,9,10,11,13 \\ 11,12,18 \\ 7 \\ 7 \\ 9 \\ 10 \\ 13 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Fig.15 An adjacency matrix of the 19-district KOREA map

Fig.15는 Fig.14에 대해 인접 지역에 대한 정보를 행렬화 한 것이다.



$$V(i,X) = \begin{bmatrix} 10000100101000000000 \\ 01000010010010000000 \\ 0001000000010101000 \\ 00101001000000010111 \end{bmatrix}$$

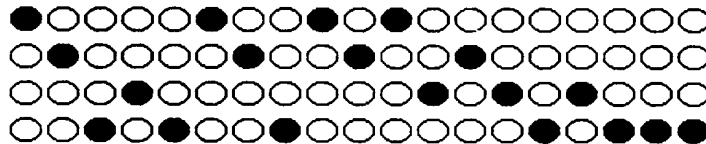


Fig.16 The solution of the 19-district KOREA map to a four-color

Fig.16은 Fig.15와 같은 인접 정보를 입력 데이터로 C언어로 프로그램하여 4색 배치 문제를 해결한 행렬도이다. 여기서 행은 색을 나타내는 것이고 열은 지역 번호를 나타낸다.

Fig.17은 Fig.14의 대한민국의 19개 행정 지역 지도를 Fig.16의 해를 가지고 4색 배치 작업을 완성한 지도이다.

● 4색 배치된 대한민국의 19개 행정 지역 지도

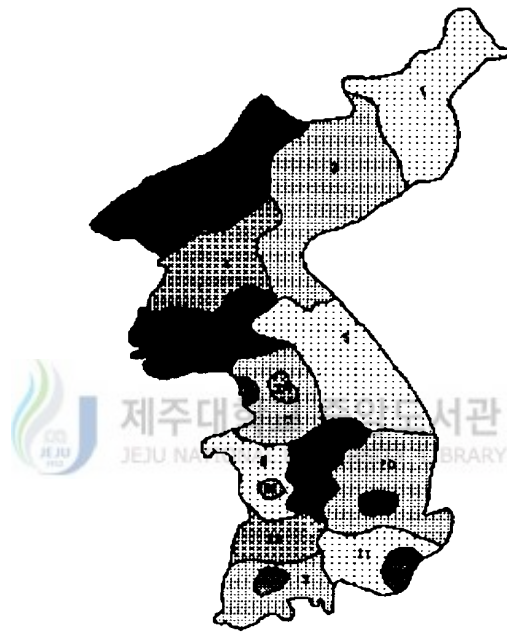


Fig.17 A four-colored map of the 19-district KOREA map

■ 미국의 48개주 지도 문제

Fig.18은 미국의 48개 주 지도이다.



Fig.18 A 48-state map of the United States.

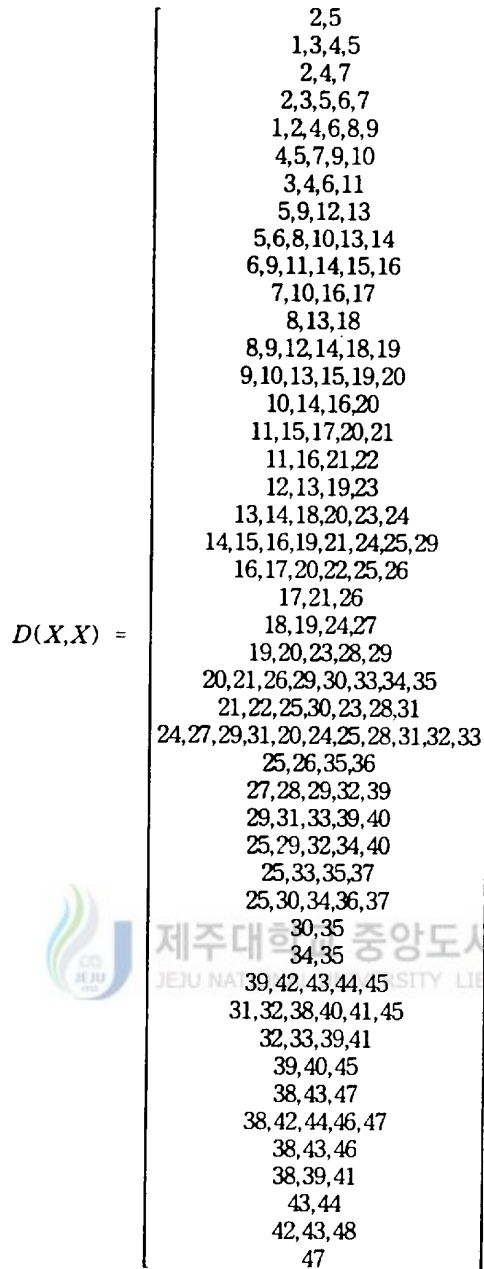


Fig. 19 An adjacency matrix of the 48-state U.S map

Fig. 19는 Fig. 18에 대해 인접 지역에 대한 정보를 행렬화 한 것이다.

$$V(i,X) = \begin{bmatrix} 000010000101000000010000010000101010000001010000 \\ 101001010010010001001001001001010100010010000110 \\ 000100000000101010000010100100000001100100101000 \\ 01000010100000010010010000001000000001000000001 \end{bmatrix}$$

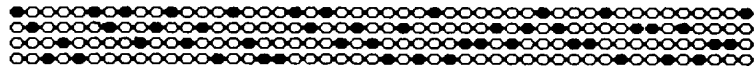


Fig. 20 The solution of the 48-state U.S map to a four-color

Fig. 20은 Fig. 19와 같은 인접 정보를 입력 데이터로 C언어로 프로그래밍하여 4색 배치 문제를 해결한 행렬도이다. 여기서 행은 색을 나타내는 것이고 열은 지역 번호를 나타낸다.

Fig. 21은 Fig. 18의 미국의 48개 주 지도를 Fig. 20의 해를 가지고 4색 배치 작업을 완성한 지도이다.

● 4색 배치된 미국의 48개 주 지도

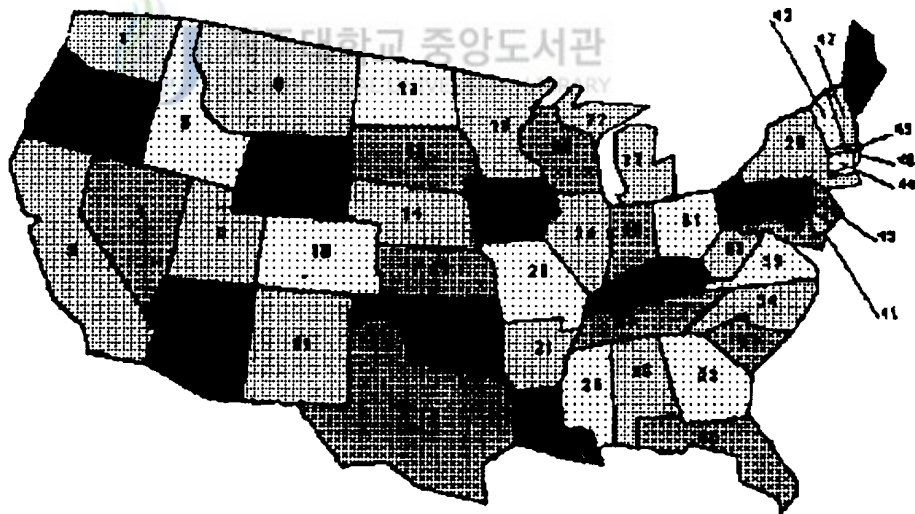


Fig. 21 A four-colored map of the 48-state U.S map

VI. 결 론

본 논문에서는 신경 회로망에서 인접 뉴런들간의 조정 정보 전달에 의해 4색 배치 문제를 효율적으로 해결하는 알고리즘을 제시하였다. 네 가지색은 4개의 뉴런으로 표시하였으며, 병렬 알고리즘은 McCulloch-Pitts의 2진 뉴런 모델의 원리를 사용하였다. 해를 구하는 방법에서 한 지역에서 선택된 출력 정보를 인접 지역에 전달함으로써 선택된 뉴런과 인접한 다른 지역의 뉴런은 자동으로 색 결정에서 제외시키고, 비선택된 나머지 뉴런들도 색 결정에서 자동으로 제외시키는 방법으로 4색 배치 문제를 효율적으로 해결하였다. 해를 구하는 과정에서 정보 전달을 받은 어떤 지역은 2개의 뉴런으로, 어떤 지역은 인접 지역에서 전달받은 정보에 의해 색 배치를 위한 작업을 따로 하지 않아도 자동으로 색이 결정되는 자연스런 방법을 사용하였다.

그리고 이를 프로그램화하여 대한민국 19개 행정 지역 지도 및 미국의 48개 주 지도에 적용한 후 시뮬레이션 결과를 기존의 결과와 비교함으로써 본 알고리즘의 유용성을 입증하였다.

앞으로의 연구 과제는 신경 회로망의 기본 연산에 적용될 보다 효율적인 알고리즘 생성과 신경 회로망의 구현 및 필요에 따라 신경 회로망과 순차 컴퓨터가 결합된 효율적인 알고리즘에 대한 연구이다.

참 고 문 헌

- A. Mooppenn et al. 1987. A neurocomputer based on an analog - digital hybrid architecture. in Proc. First Int. Conf. Neural Networks, Vol. III. 479-486.
- A. P. Thakoor et al. 1987. Electronic hardware implementations of neural networks, Appl. Oct. Vol. 26. 5058-5092.
- B. Widrow and M. E. Hoff. 1960. Adaptive switching circuits. in IREWESCON Convention Rec.Sept, pp. 25-39.
- D.O Hebb. 1949. The Organization of Behavior, New York : Wiley.
- E. D. Dahi. 1987. Neural network algorithm for an NP-Complete problem: Map and graph coloring. in Proc. First Int. Conf. on Neural Network, Vol. III. 113-120.
- F. Rosenblatt. 1982. Principles of Neurodynamics, New York : Spartan.
- J.J. Hopfield and D. W. Tank. 1985. Neural computation of decisions in optimization problems. Bio. Cybern, Vol. 52. 141-152.
- K.Apple and W. Haken. 1977. The solution of the four-color-map problem. Scientific American, Oct. 108-121.
- Marilyn McCORD Nelson and W.T Illingworth. 1992. A Practical Guide to Neural Nets, Vol. IV. 36-58.
- M. Minsky and S. Papert. 1969. Perceptrons, Cambridge, MA : MIT Press.

- W. S. McCulloch and W. H. Pitts. 1943. A logical calculus of ideas imminent innervous activity. Bull. Math. Biophy, Vol. 5.
- Yoshiyasu Takefuji and Kuo Chun Lee. 1991. Artificial Neural Networks for Four-Coloring Map Problems and K - Colorability Problem. IEEE Trans. Circuits Syst, March. Vol. 38. 326-333.



본 논문과 관련된 저자의 발표 논문

- 1) 현해진, 김덕주, 이기태, 임재윤, 1993, “신경 회로망에서 효과적인 조정 정보 전달에 의한 4색 배치 문제 해결 알고리즘”, 한국 통신학회 추계 종합학술 발표회 논문집, pp. 295-298.
- 2) 현해진, 김덕주, 강부식, 이기태, 임재윤, 1993, “신경 회로망에서 뉴런 간의 연결도를 이용한 4색 배치 문제 해결 알고리즘”, 산업 기술 연구 보고 제 4권 pp. 51-57.



감사의 글

학문의 기쁨은 인생 삼락중 일락이라고 표현한 공자의 말씀이 생각납니다. 실로 어렵고 힘든 과정이었지만 본 논문의 결실을 위해 도움을 주신 분들께 감사의 말씀을 드리겠습니다. 언제나 따뜻한 충고를 아끼지 않으시며 열과 성의를 다해 지도해 주신 지도교수 임재운 교수님께 진심으로 감사드립니다. 내용이 충실한 논문을 위하여 항상 따뜻한 마음과 따가운 충고를 아끼지 않으신 이용학 교수님, 장재성 교수님, 김홍수 교수님께 깊은 감사를 드리고 늘 곁에서 다정하게 조언을 해주신 양두영 교수님, 강진식 교수님께도 감사를 드립니다.

논문 정리의 어려움을 극복하는데 도움을 준 이기태 선배님께, 자신의 일을 마다않고 원고 정리를 하는데 많은 도움을 주신 후배 덕주, 경배와 동료 대학원생께도 감사를 드립니다.

멀리서 염려를 해주신 친구 강용국과 많은 친구분들께도 우정의 마음을 전합니다. 그리고, 이 길을 택하는데 힘이되어 주신 바드리시오 신부님, 항상 잊지 않고 기도로 기억해 주신 레오 학사님, 약해질때 기도로써 보이지 않는 힘을 주신 안나 수녀님께도 감사의 뜻을 전합니다.

끝으로, 병상에서 고통중에도 헌신적인 사랑을 아끼지 않으신 부모님, 끊임없는 충고와 격려로써 최선을 요구하신 큰 형 내외분, 작은 형 내외분, 누님 내외분, 인내와 사랑으로 어려움을 참으며 성원해주신 사랑하는 아내 소피아와 함께 이 논문이 완성된 기쁨을 나누고 싶고, 이 논문이 사랑하는 예찬이의 성장 과정에 도움이 되기를 간절히 바랍니다.