
碩士學位論文

하부가열 수평유체층에서 자연대류
유동에 관한 수치해석

濟州大學校 大學院

機械工學科



제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

梁 種 訓

1997年 12月

하부가열 수평유체층에서 자연대류 유동에 관한 수치해석

指導教授 玄 明 澤

梁 種 訓

이 論文을 工學 碩士 學位論文으로 提出함



1997年 12月

제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

梁種訓의 碩士學位 論文으로 認准함

審査委員長 _____

委 員 _____

委 員 _____

濟州大學校 大學院

1997年 12月

Numerical Study on Natural Convection in a
Horizontal Fluid Layer Heated from Below

Jong-Hoon Yang

(Supervised by professor Myung-Taek Hyun)



A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF THE
REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF MASTER OF
ENGINEERING

DEPARTMENT OF MECHANICAL ENGINEERING
GRADUATE SCHOOL
CHEJU NATIONAL UNIVERSITY

1997. 12

목 차

LIST OF FIGURES AND TABLE	II
NOMENCLATURE	IV
SUMMARY	VI
I. 서 론	1
II. 이 론	5
2.1 기본방정식의 유도	5
2.2 경계조건	7
2.3 수치해석 방법	8
2.3.1 기본방정식의 이산화	8
2.3.2 계산방법	9
III. 결과 및 고찰	12
3.1 수치해석의 타당성 고찰	12
3.2 격자수에 대한 영향	13
3.3 임계 Rayleigh수의 결정	14
3.4 Rayleigh수에 따른 영향	15
3.5 Prandtl수와 임계 Rayleigh수의 관계	16
IV. 결 론	33
참고문헌	34

LIST OF FIGURES AND TABLE

Fig. 1 Schematics of the present study	11
Fig. 2 Influence of the number of grid for Pr=10	18
Fig. 3 Influence of the number of grid for Pr=1.0	19
Fig. 4 Influence of the number of grid for Pr=0.1	20
Fig. 5 Influence of the number of grid for Pr=0.01	21
Fig. 6 Determination of critical Rayleigh number for various Prandtl numbers using the equation of Malkus and Veronis(1958)	22
Fig. 7 Averaged Nusselt number with Rayleigh numbers for Pr=10	23
Fig. 8 Averaged Nusselt number with Rayleigh numbers for Pr=1.0	24
Fig. 9 Averaged Nusselt number with Rayleigh numbers for Pr=0.1	25
Fig. 10 Averaged Nusselt number with Rayleigh numbers for Pr=0.05	26
Fig. 11 Contour of isotherms(top diagram) and velocity vector fields (bottom diagram) for Pr=10 ; (a) Ra=1800, (b) Ra=3000, (c) Ra=5000, (d) Ra= 10000	27
Fig. 12 Contour of isotherms(top diagram) and velocity vector fields (bottom diagram) for Pr=1.0 ; (a) Ra=1800, (b) Ra=3000, (c) Ra=5000, (d) Ra= 10000	28
Fig. 13 Contour of isotherms(top diagram) and velocity vector fields (bottom diagram) for Pr=0.1 ; (a) Ra=2000, (b) Ra=4000, (c) Ra=8000, (d) Ra=10000	29

Fig. 14 Contour of isotherms(top diagram) and velocity vector fields (bottom diagram) for $Pr=0.05$; (a) $Ra=2000$, (b) $Ra=4000$, (c) $Ra=8000$, (d) $Ra=15000$	30
Fig. 15 Plot of the computed constant B with Prandtl number	31
Fig. 16 Plot of the computed critical Rayleigh number with Prandtl number32	
Table 1 Comparison of averaged Nusselt number with other results (Bertin et al.,1985)	13



NOMENCLATURE

α_c	: critical wave number
A	: aspect ratio = H/L
F	: flow rate through a control volume
g	: acceleration due to gravity, [m/s ²]
H	: height of the enclosure, [m]
h	: heat transfer coefficient, [W/m ² · K]
k	: conductivity, [W/m · K]
Nu	: Nusselt number = hL/k
P	: dimensionless pressure
Pr	: Prandtl number = ν/α
Ra	: Rayleigh number = $g\beta\Delta TH^3/\nu\alpha$
T	: dimensionless temperature
T_c	: dimensionless temperature of cold wall, [K]
T_h	: dimensionless temperature of hot wall, [K]
$\Delta T'$: temperature difference = ($T_h - T_c$), [K]
t	: dimensionless time
Δt	: dimensionless time step
u, v	: velocity component in x and y direction, [m/s]
x, y	: coordinate axis in the physical domain, [m]

Greek Symbols

- Γ_ϕ : diffusion coefficient
- α : thermal diffusivity, [m²/s]
- β : thermal expansion coefficient, [°C⁻¹]
- ν : kinematic viscosity, [m²/s]
- ρ : density, [kg/m³]
- ϕ : general dependent variable

Superscripts

- ' : dimensional value
- *

Subscripts

- ave : average value
- c : critical value



SUMMARY

The natural convection driven by a thermal buoyancy force was investigated in a square cavity. The top and bottom walls are cold and hot, respectively, while the vertical boundaries are adiabatic. A control volume approach with a power-law scheme was used to formulate the finite difference equations. The results are presented isotherms, velocity vectors, Nusselt numbers and critical Rayleigh numbers for the ranges of $Ra = 1750 \sim 20000$ and $Pr = 0.05 \sim 10.0$. The critical Rayleigh number increases as Prandtl number decreases. There exists clockwise unicell flow near critical Rayleigh number, while two cells appear for large Rayleigh number.



I. 서 론

자연대류는 온도 또는 농도차에 의하여 유발되는 부력 및 표면장력의 변화가 점성 및 확산을 극복할 때 일어난다. 자연대류는 맨틀의 대류, 대기의 거동 및 난류의 근원을 밝히려는 학문적인 면 뿐만 아니라 기술의 발달에 따라 제품의 균질화, 순수화를 위하여 엄밀한 유동환경의 제어가 필요한 결정 성장 및 화학증착 반응기 등을 비롯하여 전자소재 가공, 전산기 내부에서의 냉각, 핵 반응기의 안정성, 태양열 집열판에서의 열전달, 그리고 정교한 열전달 장치의 설계 등 실용적인 면에서 그 중요성이 최근 강조되고 있다. 이와 같은 배경에서 자연대류의 발생요건 및 자연대류가 전달현상에 미치는 영향에 대한 연구가 계속되고 있다.

이러한 자연대류 현상을 잘 설명해주는 무차원 인자는 Rayleigh수와 Marangoni수이다. 이 중 Rayleigh수는 부력에 의한 자연대류 현상을, Marangoni수는 표면장력의 변화에 의한 자연대류 현상을 해석하는데 중요한 인자이다.

자연대류에 대한 연구는 Benard(1901)의 체계적인 실험과 Rayleigh(1916)가 선형 안정성 이론을 적용하여 해석한 이후 많은 연구자들에 의해 연구가 진행되어 왔다. Rayleigh는 Benard의 실험결과에서 자연대류는 발생은 부력에 의해 발생한다고 해석하였으나 Pearson(1958)은 부력뿐만 아니라 표면장력의 변화에 의해서도 자연대류가 발생할 수 있음을 해석적으로 보였다. 그 이후 많은 연구자들의 연구결과에 의하면 Benard의 실험결과는 Rayleigh가 주장한 것처럼 부력에 의한 자연대류라기 보다는 표면장력의 변화에 의한 자연대류라는 주장도 있다. 통상적으로 부력에 의한 자연대류를 Benard-Rayleigh문제 또는 Benard대류라 부르며, 표면장력의 변화에 의하여 발생하는 대류를 Marangoni

-Rayleigh문제 또는 Marangoni대류라 부른다. Marangoni대류는 Benard대류와는 달리 자유 경계면을 포함하는 계에서만 발생하는 현상이며, 무중력 상태인 외계에서도 발생하는 현상이다.

밀폐용기내에서의 자연대류는 경계층내의 유동과 내부중심에서의 유동의 상관관계의 의해 복잡한 현상이 발생하며 경계조건 및 기하학적 조건에 따라 유동형태가 달라지므로 유동형태를 예측하기가 매우 어렵다. 즉, 기하학적 형상 및 경계조건등의 변화에 따라 용기내의 유동이 여러 개의 셀이나 층을 갖는 유동형태를 나타낸다. Chandrasekhar등(1961)에 의해 무한 평판 사이에 하부 가열, 상부 냉각시 발생하는 셀의 크기에 대한 연구가 많이 진행되어 왔다. 그러나 셀의 크기나 셀의 수에 대한 연구자들의 견해는 각기 다르다. 선형 안정성 이론에 의하면 Prandtl수가 무한대일 때 임계파수(critical wave number) $a_c = 3.117$ 로 제안되고 있다. 또한, Ozoe등(1983)은 수치해석을 통해 여러 가지 셀의 크기를 제안하였으나 안정된 셀의 크기는 제시하지는 못하였다. Koshmieder(1974)는 실험을 통하여 임계상태 이상에서 여러 개의 사각형 셀이 발생함을 보고하였으며 자연대류가 발생하는 임계 Rayleigh수($Ra_c=1707.8$)를 구하였다.

일반적으로 부력에 의한 자연대류의 유동형태 및 열전달 특성은 Rayleigh 수에 크게 영향을 받으며 Prandtl수의 영향은 매우 적어 무시되어 왔다. 반면 Prandtl수가 0.1이하일 경우 관성항의 비선형성이 증가하게 되어 Prandtl수의 영향을 무시할 수 없다. 즉, 이 경우의 자연대류의 유동특성 및 열전달 특성은 Rayleigh수와 Prandtl수의 영향을 동시에 고려해야 한다. Prandtl 수가 작은 물질은 일반적으로 액체금속을 나타내는데 유동형태의 관찰이나 온도 등의 계측이 어렵기 때문에 실험이 매우 어려우며 따라서 실험적 연구를 통한 임계

Rayleigh수의 조사 및 Rayleigh수와 Prandtl수의 영향에 대한 해석은 매우 드물다. 수온(Pr=0.025)에 대한 연구로는 Verhoeven(1964)에 의해 행해졌는데, 실린더에서 임계 Ra수가 1808 ± 16 으로 보고되었고, Soberman(1959)은 최소 1200에서 최대 2000으로 보고하고 있다.

수치해석으로는 Samuel 과 Churchill(1967)은 긴 수평 채널에서 일어나는 자연대류 현상에 대하여 유한차분법으로 해석하였고, Chao등(1982)은 자연대류 현상을 유한차분법으로 해석하여 임계 Rayleigh수와 Prandtl수간의 관계를 다음의 함수로 나타내었다.

$$Ra_c = 1708.8[1 + (0.00717/Pr)^{\frac{5}{3}}]^{\frac{3}{5}} \quad (1)$$

위에 제시된 관계식은 Prandtl수가 0.1보다 컸을 때의 경우에는 적은 오차를 보인 반면 Prandtl수가 0.1보다 작았을 때의 경우 상당한 오차를 보이고 있다. 반면, Bertin과 Ozoe(1985)는 수정된 유한요소법으로 각각의 Pr수에 따른 Ra_c 를 구하여 Prandtl수가 0.1보다 작았을 때의 경우 또한 상당히 정확한 임계 Rayleigh수를 예측할 수 있는 임계 Rayleigh수와 Prandtl수와의 관련식을 아래와 같이 제시하였다.

$$(Ra_c)^{28} = (1262/Pr^{0.11})^{28} + (1708)^{28} \quad (2)$$

본 연구에서는 Rayleigh-Benard대류에 대하여 하부면이 가열되고(등온), 상부면이 냉각(등온)되며, 수직경계면이 단열된 밀폐용기내의 온도차에 의해 발생하는 자연대류 현상에 대하여 수치해석하였다. 또한 Rayleigh수, Prandtl

수에 따른 유동형태, 온도분포 그리고 Nusselt수를 구하고, 자연대류가 발생하는 임계 Rayleigh수에 대하여 본 연구의 결과를 이용하여 해를 예측하고 기존의 연구와 비교하고자 한다.



II. 이 론

본 연구에서는 종횡비 $A=1$ 인 직각밀폐용기내에서 온도차에 의해 발생하는 자연대류에 대하여 수치해석하였다. 해석하고자 하는 계의 기하학적 형상 및 경계조건은 Fig. 1과 같다. 두 수직 경계면은 단열되어 있으며, 하부 수평 경계면은 고온 그리고 상부 수평 경계면은 저온으로 유지하여 수평 경계층을 갖도록 하였다.

2.1 기본방정식의 유도

열전달 및 유체 유동을 수치해석하기 위한 기본방정식을 수립하는 방법으로는 유동함수-와도방법(stream function-vorticity method)과 원시변수방법(primitive variable method)의 두가지로 분류된다. 본 연구에서는 자연대류가 발생하는 임계 부분 및 유동현상이 매우 미세한 관찰을 위해 원시변수방법을 사용하였다. 원시변수방법은 많은 변수와 수렴해를 얻기 위한 반복계산, 그리고 압력항이 속도항과 서로 연관되어 있기 때문에 이에 대한 보정 등을 위해 많은 계산시간이 필요한 반면 해의 정확성을 기할 수 있는 장점을 가지고 있다.

밀폐용기에서의 순수물질에 대한 자연대류를 해석하기 위한 실질적인 물리적 현상을 기술하는 일반적인 기본방정식을 단순화시키기 위하여 유체는 비압축성, 뉴우튼 유체이고, 점성소산이 무시되며, 부력항에 온도차에 의한 밀도 변화만을 고려한 Boussinesq의 근사를 적용된다고 가정하였다. 위의 가정에 의하여 2차원 정상 연속방정식, 운동방정식 및 에너지 방정식은 다음과 같이 나

타낼 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial x'}(\rho u') + \frac{\partial}{\partial y'}(\rho v') = 0 \quad (3)$$

$$u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x'} + \nu \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \right) \quad (4-1)$$

$$u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y'} + \nu \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} \right) + g[\beta(T - T_0')] \quad (4-2)$$

$$u' \frac{\partial T}{\partial x'} + v' \frac{\partial T}{\partial y'} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y'^2} \right) \quad (5)$$

기본방정식에 대하여 해석의 일반성을 부여하고 시스템을 지배하는 파라미터의 영향을 고찰할 수 있도록 기본방정식의 각 변수에 대하여 다음과 같이 무차원량을 정의하고 무차원하였다.

$$x = \frac{x'}{H}, \quad y = \frac{y'}{H}, \quad u = \frac{H}{\alpha} u', \quad v = \frac{H}{\alpha} v', \quad (6)$$

$$P = \frac{1}{\rho} \left(\frac{H}{\alpha} \right)^2 P', \quad T = \frac{T - T_0'}{\Delta T}$$

위의 식(6)에서 정의된 무차원량을 식(3)~(5)에 대입하고 정리하여 식(7)~(9)과 같은 무차원 기본방정식을 얻었다.

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \quad (7)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \text{Pr} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (8-1)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \text{Pr} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + Ra \cdot \text{Pr} \cdot T \quad (8-2)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (9)$$

위의 식(7)~(9)의 기본방정식으로 부터 무차원수는 Prandtl수와 Rayleigh수가 본 해석 시스템을 지배하는 무차원수임을 알 수 있다.

2.2 경계조건

본 연구에서는 해석의 안정성을 부여하기 위하여 초기조건을 해석 영역 내부의 모든 속도는 0으로 하고, 해석영역 내부의 초기 온도를 상·하경계면 온도의 평균값인 0.5를 갖도록 하였다. 경계조건은 직각 밀폐용기의 수직 경계면은 단열이며 수평 경계면에 대하여 하부면은 고온, 상부면은 저온으로 일정한 온도차가 유지되도록 하였다. 그리고 각 벽면에서 점착조건(No-slip condition)을 적용하여 벽면에서의 속도(u, v)를 0으로 하였다. 따라서 무차원화된 경계조건은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} u(0, y) &= u(1, y) = u(x, 0) = u(x, 1) = 0 \\ v(0, y) &= v(1, y) = v(x, 0) = v(x, 1) = 0 \\ T(x, 0) &= 1, \quad T(x, 1) = 0, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0,1} = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

2.3 수치해석 방법

2.3.1 기본방정식의 이산화(Discretization)

기본방정식을 수치해석하기 위해서는 독립변수의 미분항에 대하여 대수방정식 형태로 변환하여야 하며, 대수방정식으로 변환된 방정식을 이산화방정식이라 한다. 이산화방정식은 격자점 집합에서 독립변수들의 대수적인 관계로 구성되고, 이는 미분형의 방정식과 동일한 물리적 상황을 나타낸다. 식(7)~(9)의 일반적인 이산화방정식은 식(11)과 같다.

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b \quad (11)$$

여기서, 나타난 각 계수들은 이산화 방법에 따라 다르며, 본 해석에서는 역승도식을 적용하여 다음과 같이 각 계수들을 구하고 수치해석하였다.

$$\begin{aligned} a_E &= D_e(1 - 0.1|Pe|_e)^5 + \mathbf{[-F}_e, 0] \\ a_W &= D_w(1 - 0.1|Pe|_w)^5 + \mathbf{[-F}_w, 0] \\ a_N &= D_n(1 - 0.1|Pe|_n)^5 + \mathbf{[-F}_n, 0] \\ a_S &= D_s(1 - 0.1|Pe|_s)^5 + \mathbf{[-F}_s, 0] \\ b &= S_c \Delta x \Delta y \\ a_P &= a_E + a_W + a_N + a_S - S_P \Delta x \Delta y \end{aligned} \quad (12)$$

식(12)에서 표시된 양들은 식(13)에서와 같고 $\mathbf{[]}$ 의 표기는 괄호안의 값들중 최고값을 의미한다

$$\begin{aligned}
D_e &= \frac{\Gamma_e \Delta y}{(\delta x)_e}, \quad D_w = \frac{\Gamma_w \Delta y}{(\delta x)_w}, \quad D_n = \frac{\Gamma_n \Delta x}{(\delta y)_n}, \quad D_s = \frac{\Gamma_s \Delta x}{(\delta y)_s} \\
(Pe)_e &= \frac{F_e}{D_e}, \quad (Pe)_w = \frac{F_w}{D_w}, \quad (Pe)_n = \frac{F_n}{D_n}, \quad (Pe)_e = \frac{F_e}{D_e}
\end{aligned}
\tag{13}$$

2.3.2 계산방법

일반적인 유동장의 해석은 기본방정식에서 알 수 있듯이 압력항과 속도항이 서로 밀접한 상관 관계를 가지고 있음으로 인해 직접적인 계산으로는 정확한 해를 구하는데 어려움을 가지고 있어 속도장 혹은 압력장을 가정하는 암시적 방법을 사용한다. 따라서 본 해석에서는 압력장을 예측하여 속도장을 계산하고 계산된 해에 대하여 보정과 수렴판정을 통해 해를 수렴시키는 과정을 반복계산함으로써 해를 구할 수 있는 SIMPLE 알고리즘(Patankar,1980)에 따라 모든 계산을 수행하였다.

앞에서 구한 이산화방정식은 비선형을 띠고 있어 반복계산을 통해 해를 수렴시켜야 하므로 이산화방정식의 계산 방법으로 TDMA(Tri-diagonal matrix algorithm)를 사용하였고 수렴이 빠르며 경계조건의 영향이 해석영역 내부로 전달되는 속도가 빠른 선순법(Line-by-line method)을 사용하여 수치해석하였다. 또한, 임계값 부근에서 유동장이 매우 미세하게 일어남에 따라 해가 발산할 수 있기 때문에 계산과정에서 안정된 수렴을 위해 하향이완계수(Under-relaxation factor)를 이용하였는데 속도량에 대해서 0.5~0.7를 사용하였고, 온도장의 경우 사용하지 않았다. 해석영역의 격자망(Grid)은 10×10~100×100으로 계산한 결과 격자망의 구성에 있어 Prandtl수에 매우 크게 영향을 받고 있어 Prandtl수에 따라 격자망에 대한 영향을 조사하고 알맞는 격자망

을 선택하여 계산하였다. 해가 정상상태에 도달되기까지는 해석 조건에 따라 1000~300000회의 반복 계산이 필요하였다.



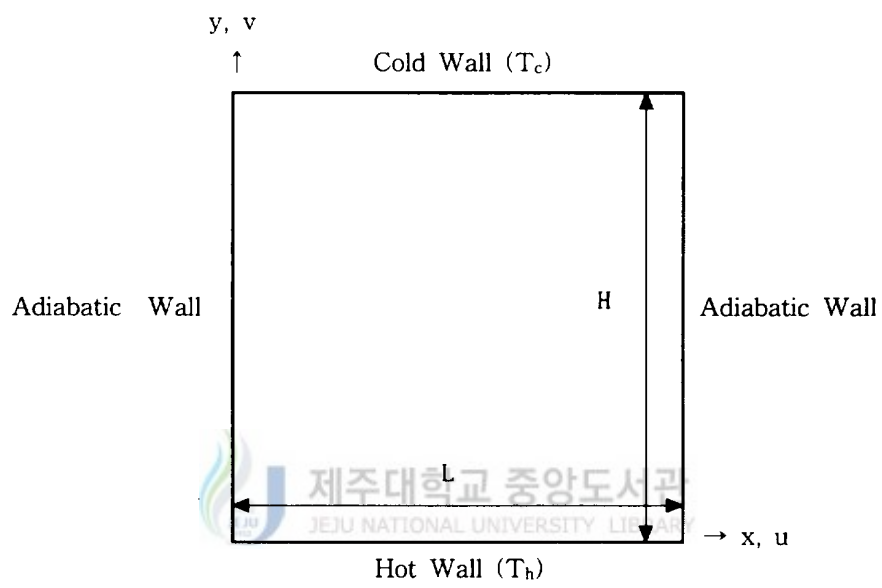


Fig. 1 Schematics of the present study

III. 결과 및 고찰

하부면이 가열되고 상부면이 냉각되며, 수직경계면이 단열된 수평 경계층을 갖는 밀폐용기내에서 온도차에 의해 발생하는 자연대류 현상에 관해 수치해석하였다. 본 연구에서는 Prandtl수와 Rayleigh수가 본 해석 시스템에 미치는 영향을 조사하기 위해 $Pr = 0.05 \sim 10.0$ 에 대하여 그리고 $Ra = 1750 \sim 20000$ 에 대하여 수치해석하여 유동이 발생하는 임계 Rayleigh수를 구하고 열전달 특성 및 유동현상을 관찰하였다.

3.1 수치해석의 타당성 고찰

자연대류를 수치해석함에 있어 일반적으로 유동현상은 비대칭성을 포함하고 있을 뿐만 아니라 압력장과 유동장이 서로 상관관계를 가지고 있기 때문에 수치해석의 결과는 일정한 해석 조건에서 해석 방법에 따라 해의 정확성이 달라진다.

본 연구에서는 일반적인 열전달 문제의 대류현상을 수치해석하는 기법으로 해의 정확성 및 수렴성이 양호한 멱승도식을 사용하여 전 해석범위를 수치해석하였다. 또한 본 수치해석의 방법의 타당성을 고찰하기 위해 기존의 연구 (Bertin 등, 1985)와 비교하였다.

Table 1은 Prandtl수가 0.1일 때 Bertin과 Ozoe(1985)의 연구결과와 본 연구에서 구해진 결과를 비교한 것이다. Rayleigh수에 따른 Nusselt수의 값에 대한 오차를 살펴보면 오차의 범위가 5% 이내로 상당히 일치하고 있을 뿐만 아니라 Rayleigh수의 변화에 따른 Nusselt수의 변화의 경향 또한 유사하게 나타나고 있어

본 수치해석 방법이 밀폐용기내의 자연대류에 대한 해석 방법을 타당한 것으로 사료된다.

Table 1 Comparison of averaged Nusselt number with other results(Bertin et al.,1985)

Ra	Present study	Bertin and Ozoe(1985)	error(%)
2000	1.13097	1.127	0.397
2200	1.21752	1.225	0.748
2300	1.25800	1.273	1.500
2400	1.29655	1.319	2.245
2500	1.33324	1.363	2.976
2600	1.36818	1.403	3.482
2700	1.40148	1.442	4.053

3.2 격자수에 대한 영향



수치해석시 격자망을 구성할 때 해석 결과의 정확성을 위해 조밀한 격자망의 구성이 필요로 하지만 많을 해석시간이 필요하기 때문에 해석의 정확성과 해석시간을 고려한 적절한 격자수의 선택이 필요하다. Prandtl수에 따라 격자수의 영향을 조사한 결과를 Figs. 2~5에서 제시하였다. Figs. 2~4에서 살펴보면 Prandtl수가 0.1보다 큰 경우에는 격자수가 증가할수록 Nusselt수가 커지고 있고 $30 \times 30 \sim 40 \times 40$ 부근에 이르러 거의 정확한 해를 구할 수 있음을 알 수 있다. 반면 Prandtl수가 0.1보다 작을 경우($Pr=0.01$), Fig. 5를 살펴보면 격자수를 70×70 까지 증가시켜도 계산 결과가 격자수에 따라 크게 변함을 알 수 있다. 따

라서 본 연구에서는 신뢰성 있는 결과를 고려하여 격자수를 Prandtl수가 0.1보다 큰 영역에서 30×30 를 그리고 Prandtl수가 0.05에서는 100×100 으로 하여 수치해석 하였다.

3.3 임계 Rayleigh수의 결정

일반적으로 임계 Rayleigh수의 계산은 열전달이 전도만이 일어나는 상태 ($Nu=1$)에서 Nusselt수가 1보다 크게 되는 Rayleigh수의 분기점을 나타낸다. 평균 Nusselt수는 다음과 같이 계산된다.

$$Nu_{ave} = -\frac{1}{L} \int_0^L \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} dy \quad (14)$$

각 Prandtl수에서 Rayleigh수에 따른 Nusselt의 영향을 관찰하기 위하여 아래의 식과 같이 임계 Rayleigh수에 따른 Nusselt수의 변화를 선형화시킬 수 있다.

$$Nu = 1 + B \left(1 - \frac{Ra_c}{Ra} \right) \quad (15)$$

여기서, B의 값은 Rayleigh수의 변화에 따른 Nusselt수의 변화의 정도를 나타내는 상수값이며 Churchill과 Usagi(1972)는 다음과 같은 관계식을 제시하였다.

$$(B)^{-5} = (1.336)^{-5} + (\text{Pr}^{0.312}/0.317)^{-5} \quad (16)$$

본 연구에서는 각 Prandtl수에 따른 임계 Rayleigh수를 구하기 위하여 위의 식(15)에 의해 $(Nu-1)$ 와 $(1/Ra)$ 의 상관관계를 도시하여 Fig. 6에 나타내었다. 임계 Rayleigh수와 상수 B값은 Fig. 6에서 보듯이 본 연구에서 행한 결과를 확장시켜 $(Nu-1)$ 이 0이 되는 지점을 기준으로 결정하였다. 이와 같이 구한 임계 Rayleigh수는 Pr=10.0일 때 1710, Pr=1.0일 때 1714, Pr=0.1일 때 1725, Pr=0.05일 때 1784로 계산되었으며, Prandtl수가 감소할수록 임계 Rayleigh수가 증가됨을 알 수 있다.

3.4 Rayleigh수에 따른 영향

Ra수의 영향을 조사하기 위해 각 Prandtl수에서 Rayleigh수를 변화시켜 수치해석하였다. Figs. 7~10은 Pr=10, 1.0, 0.1, 0.05일 때 Rayleigh수에 따른 Nusselt수의 변화를 도시한 것이다. Figs. 7~10에서 살펴보면 Prandtl수가 커질수록 임계 Rayleigh수에 가까워짐에 따라 Nusselt수의 값은 위로 볼록하는 현상이 관찰되고 있으며, 본 연구영역에서 Prandtl수가 작은 0.1인 경우에는 Rayleigh수에 따른 Nusselt수가 거의 직선으로 변함을 알 수 있고(Fig. 9), 더욱 작은 경우(Pr=0.05, Fig. 10)에는 's' 자 형태로 휘어지는 경향을 보이고 있다. 또한 각 그림에서 Rayleigh수가 커짐에 따라 Nusselt수의 증가는 완만해짐을 알 수 있다. 이와 같은 현상은 임계 Rayleigh수 근처에서는 유동이 매우 작고 유동발생지역이 경계면에서 짧은 거리에 있기 때문에 사실상 임계 Rayleigh수의 판정이 어렵기 때문으로 사료된다. 이와 같은 유동현상에 대해 좀더 정확한

관찰을 위해서는 미세한 유동현상의 해석이 가능하도록 격자의 수를 증가시켜 격자의 크기를 작게 하고 수렴판정에 있어 좀더 오차를 작게 해야 할 것으로 사료된다.

Figs. 11~14에는 $Pr=10, 1.0, 0.1, 0.05$ 일 때 Rayleigh수의 변화에 따른 등온선과 속도벡터를 각각 도시하였다. 그림에서 알 수 있듯이 임계 Rayleigh수(약 1800~2000, Figs. 11(a), 12(a), 13(a), 14(a)) 부근에서의 속도는 매우 작게 나타나고 있으며, 온도분포는 불안정한 형태로 선형적으로 나타나고 있어서 유동이 아주 미세함을 알 수 있다. 반면 Rayleigh수가 점점 증가할수록 (Figs. 11(b,c), 12(b,c), 13(b), 14(b,c)) 경계부근에서의 속도가 점점 증가하여 찌그러진 현상을 보이다가 Rayleigh수가 더 커졌을 때 (8000이상, Figs. 11(d), 12(d), 12(c,d), 14(d))에는 두 개의 셀이 나타나 유동하는 현상을 볼 수 있다. 온도분포를 살펴보면 처음 선형적이었던 분포가 Rayleigh수가 증가함에 따라 S자 형태로 나타나다가 (Figs. 11(b), 12(b), 13(b), 14(b)) S자의 휨정도는 점점 커지고 (Figs. 11(c), 12(c), 14(c)) 매우 큰 Rayleigh수 일 때(Figs. 11(d), 12(d), 13(c,d), 14(d))에는 가운데 부근에서 "블록한" 형태의 온도분포를 가져 완전히 좌우 대칭인 형태가 된다.

3.5 Prandtl수와 임계 Rayleigh수의 관계

자연대류에서 열전달 특성 및 유동형태는 Rayleigh수 및 Prandtl수에 의해 영향을 받는다. 본 해석에서는 Pr수의 영향을 조사하기 위해 $Pr=0.05, 0.1, 1.0, 10.0$ 에 대하여 수치해석하였다.

Fig. 15은 Churchill과 Usagi(1972)가 제시한 Nusselt수와 임계 Rayleigh수의 상관관계식의 계수 B의 식과 본 연구결과에서 구한 값을 도시해 놓은 것으로 거의 일치함을 알 수 있다. Fig. 16은 Prandtl수에 따른 임계 Rayleigh수를 도시한 것이다. 본 연구에서의 결과와 Verhoeven(1964)의 결과가 거의 일치하고 있음을 보여주고 있다. 보다 다양한 검증을 위해 Pr수가 아주 작은 영역까지 연구되어야 하나 수많은 격자를 구성해줘야 하기 때문에 연구결과를 얻지 못하였고, 차후 이에 대한 연구가 필요한 것으로 사료된다.



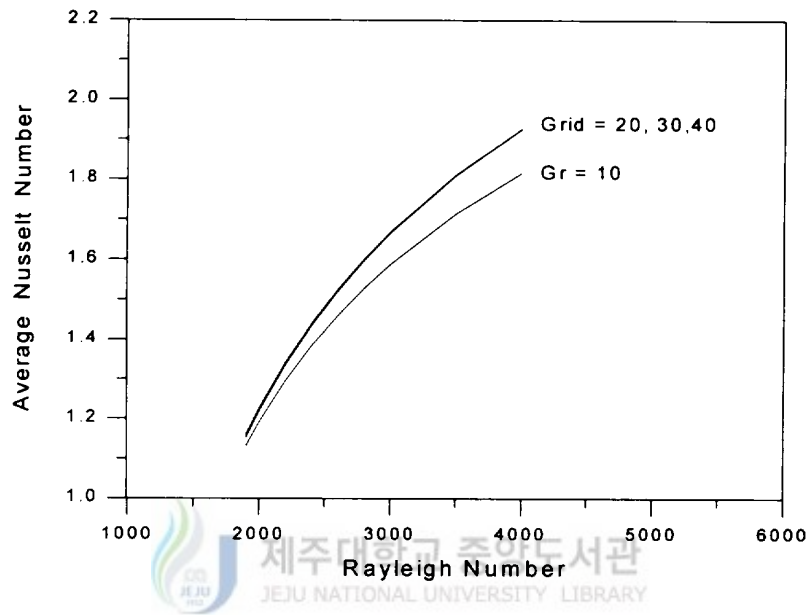


Fig. 2 Influence of the number of grid for Pr=10

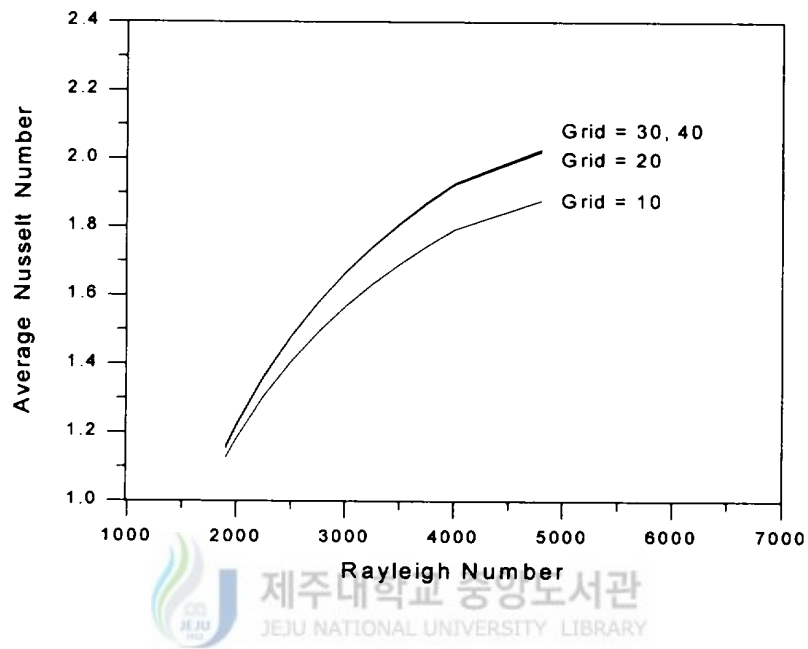


Fig. 3 Influence of the number of grid for Pr=1.0

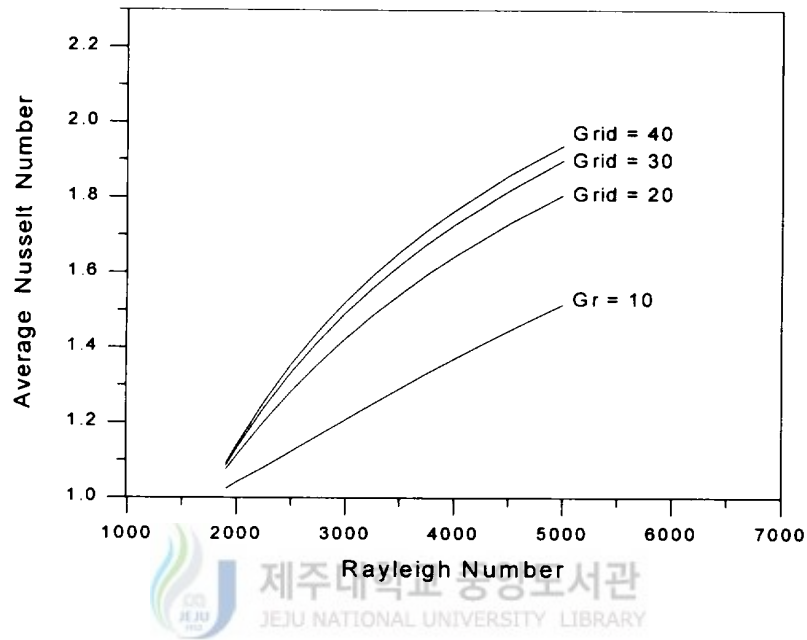


Fig. 4 Influence of the number of grid for Pr=0.1

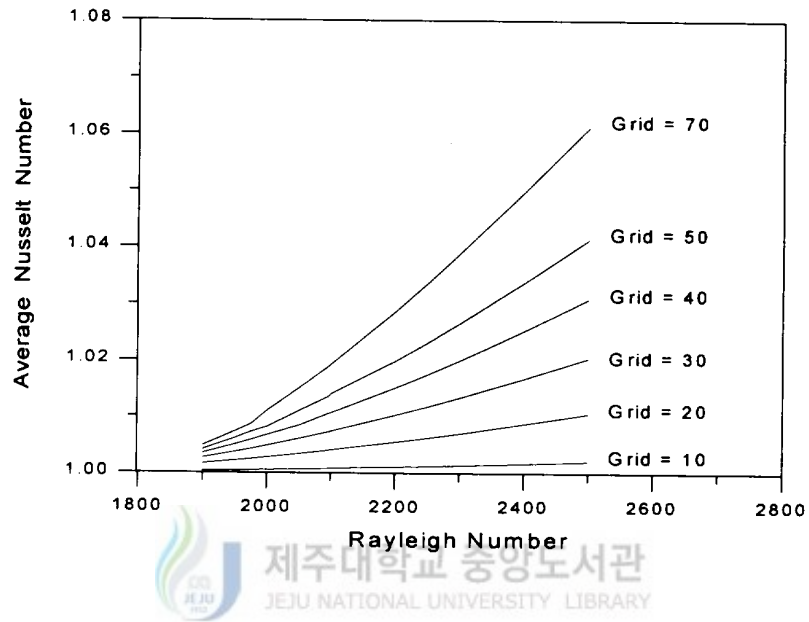


Fig. 5 Influence of the number of grid for Pr=0.01

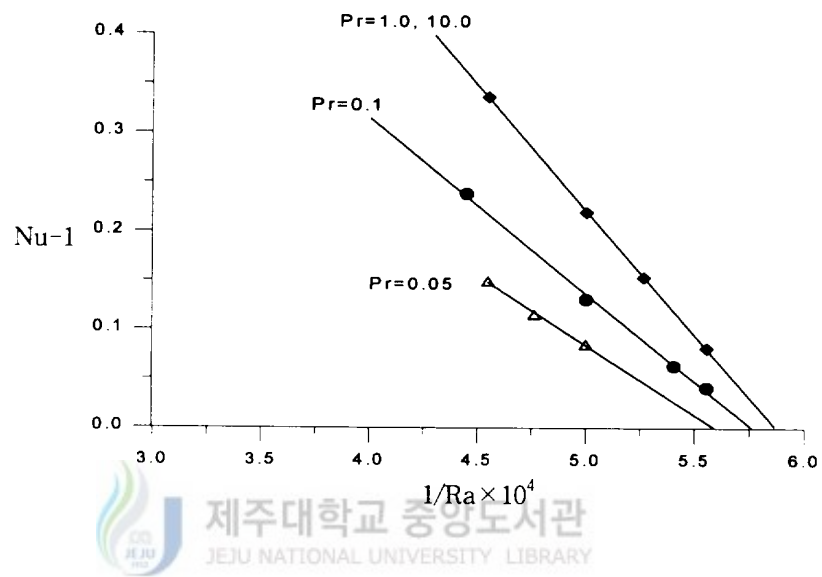


Fig. 6 Determination of critical Rayleigh number for various Prandtl numbers using the equation of Malkus and Veronis(1958)

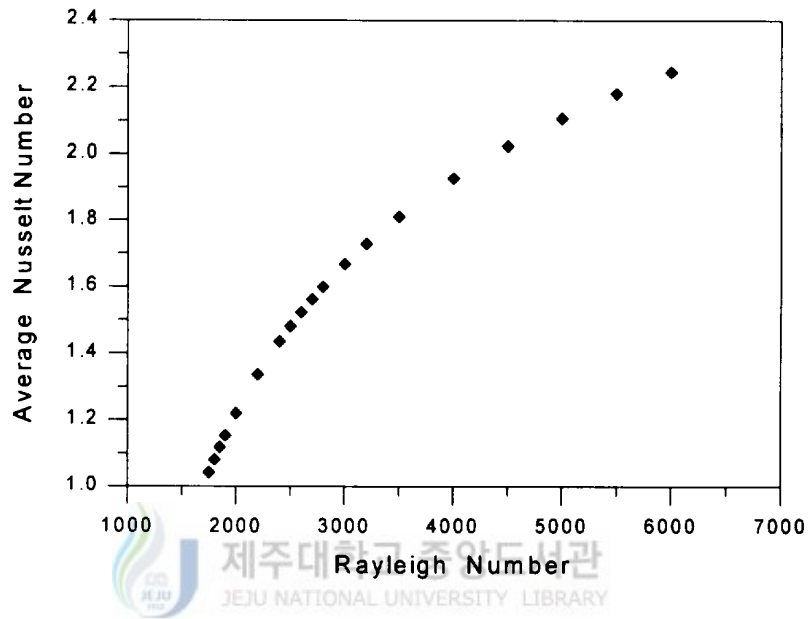


Fig. 7 Averaged Nusselt number with Rayleigh numbers for Pr=10

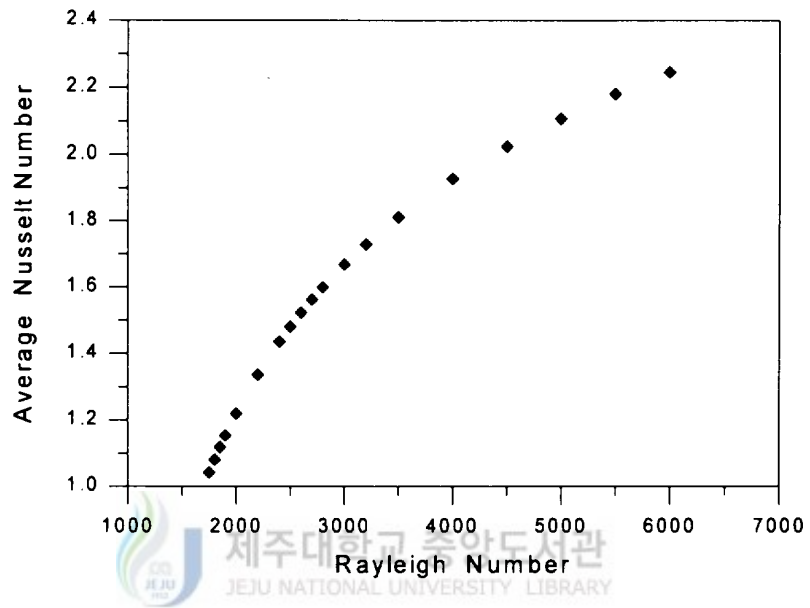


Fig. 8 Averaged Nusselt number with Rayleigh numbers for $Pr=1.0$

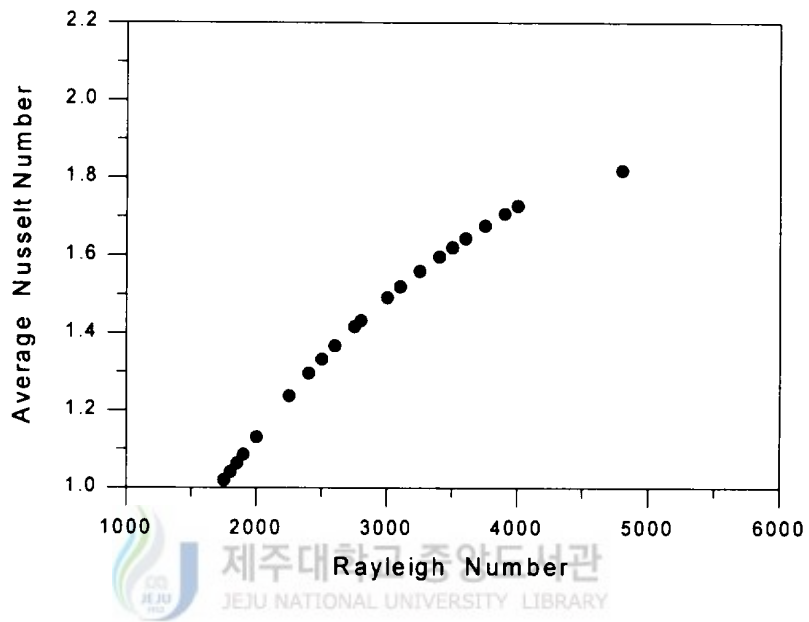


Fig. 9 Averaged Nusselt number with Rayleigh numbers for Pr=0.1

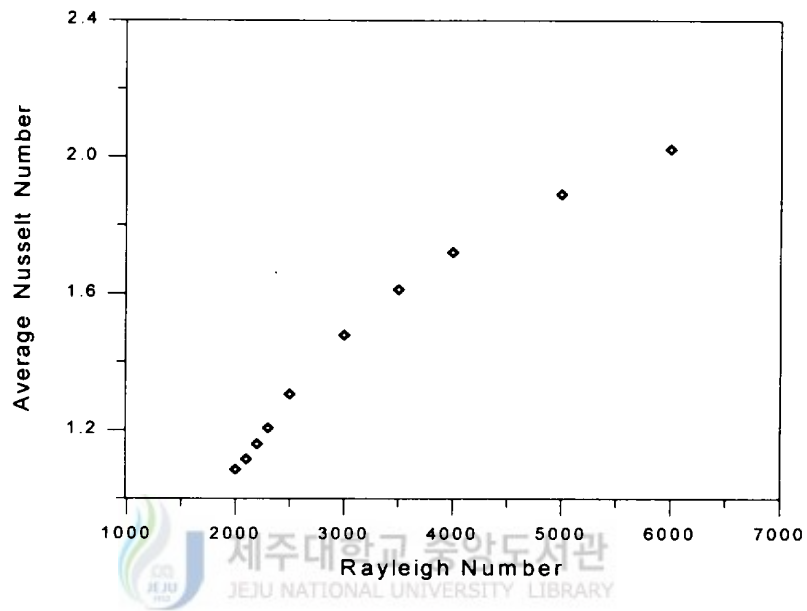


Fig. 10 Averaged Nusselt number with Rayleigh numbers for $Pr=0.05$

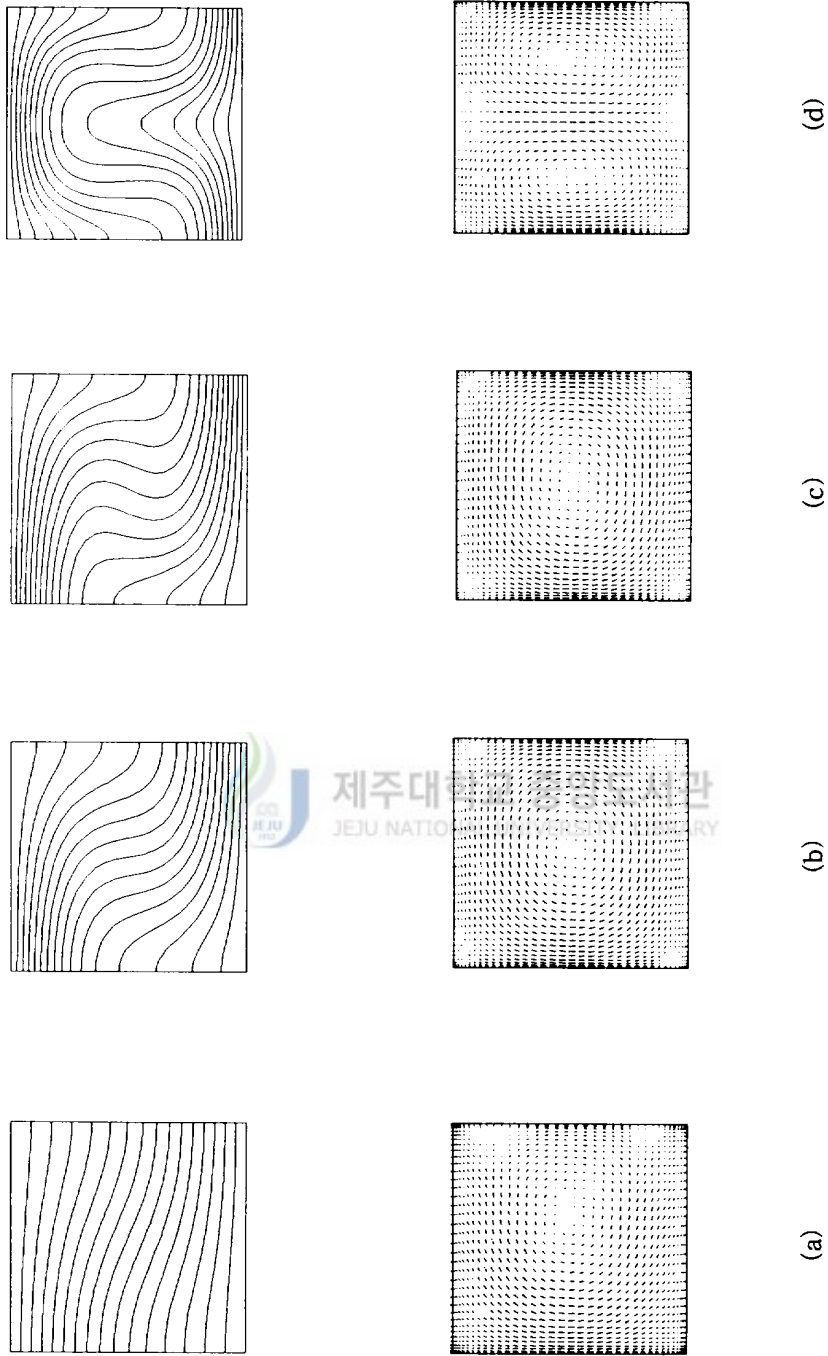


Fig. 11 Contour of isotherms(top diagram) and velocity vector fields(bottom diagram) for $Pr=10$
; (a) $Ra=1800$, (b) $Ra=3000$, (c) $Ra=5000$, (d) $Ra=10000$

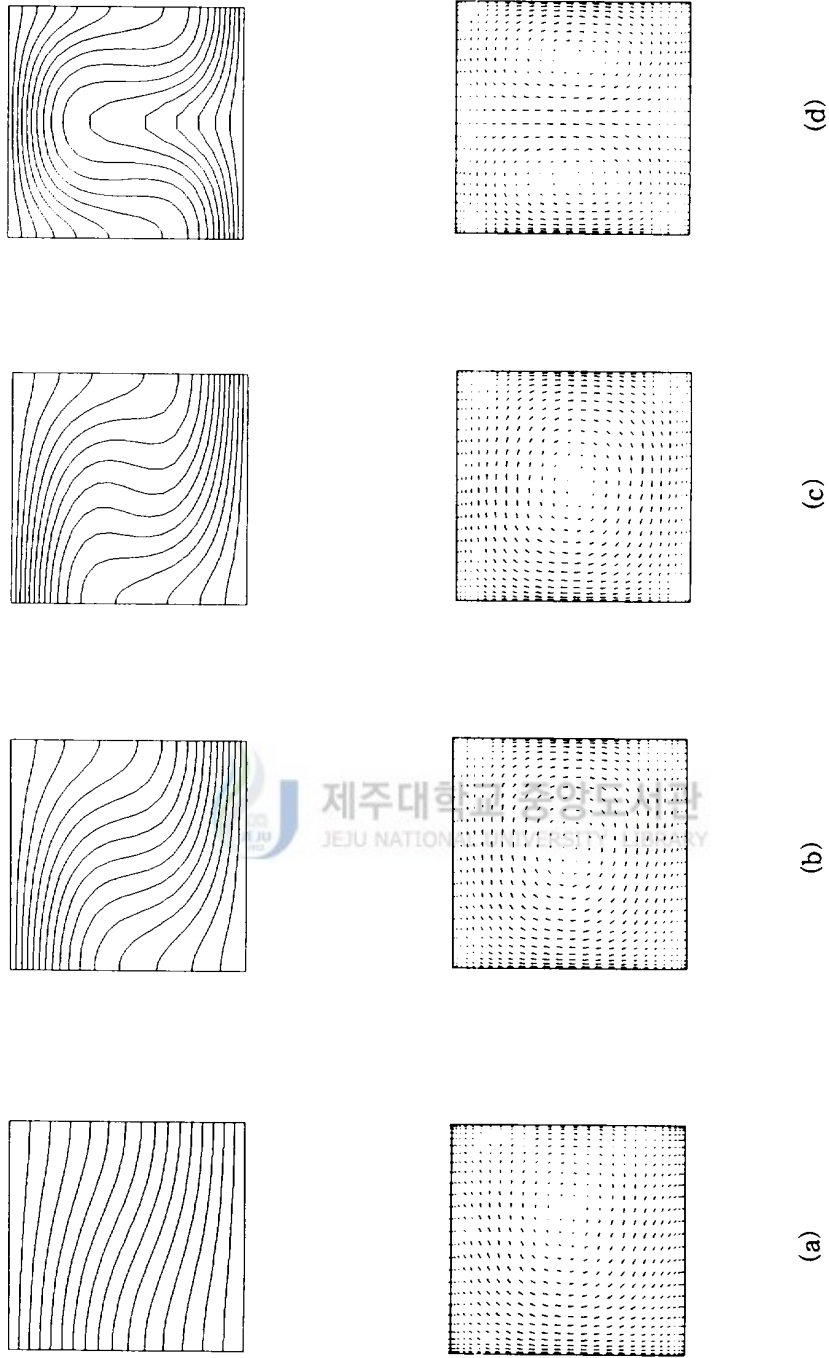


Fig. 12 Contour of isotherms(top diagram) and velocity vector fields(bottom diagram) for $Pr=1.0$
; (a) $Ra=1800$, (b) $Ra=3000$, (c) $Ra=5000$, (d) $Ra= 10000$

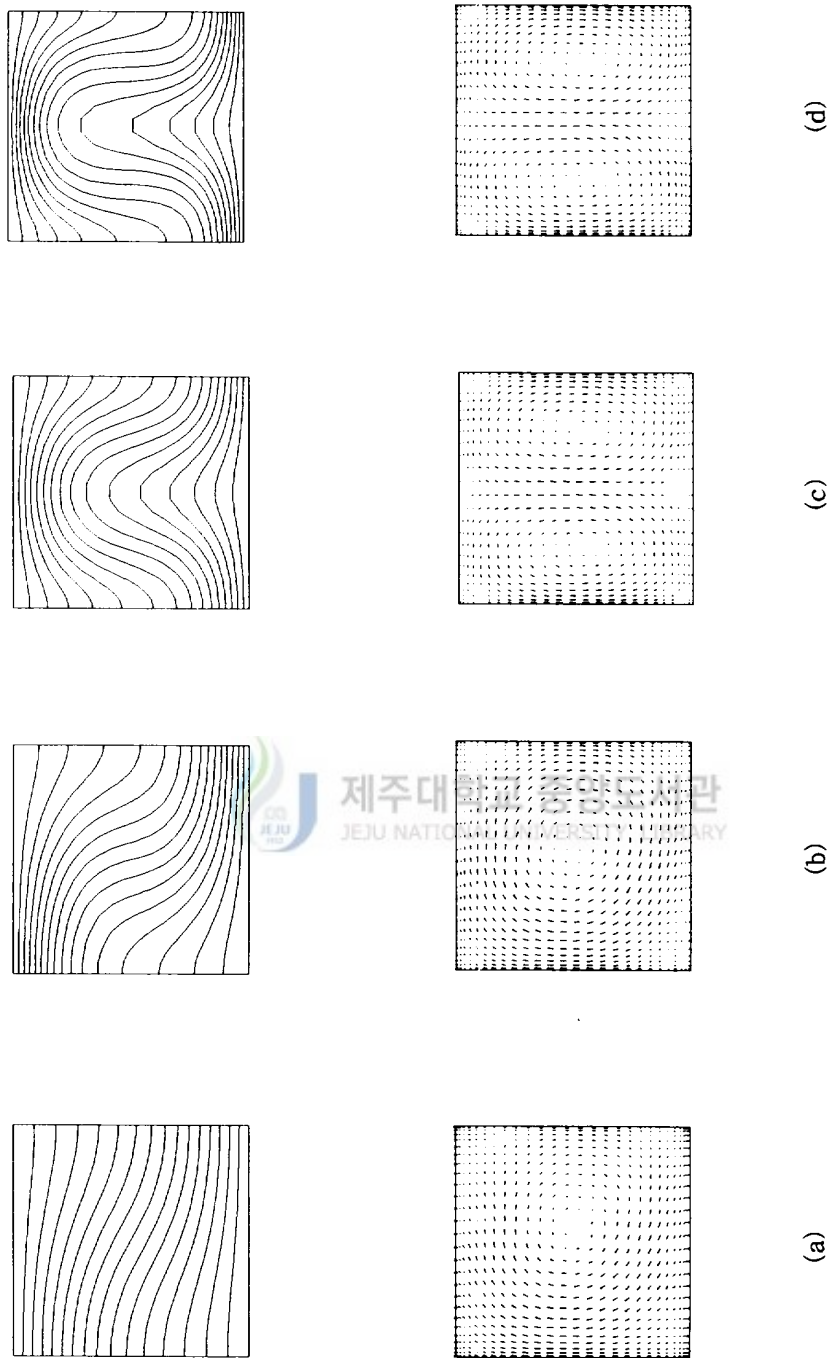


Fig. 13 Contour of isotherms(top diagram) and velocity vector fields(bottom diagram) for $Pr=0.1$
; (a) $Ra=2000$, (b) $Ra=4000$, (c) $Ra=8000$, (d) $Ra= 10000$

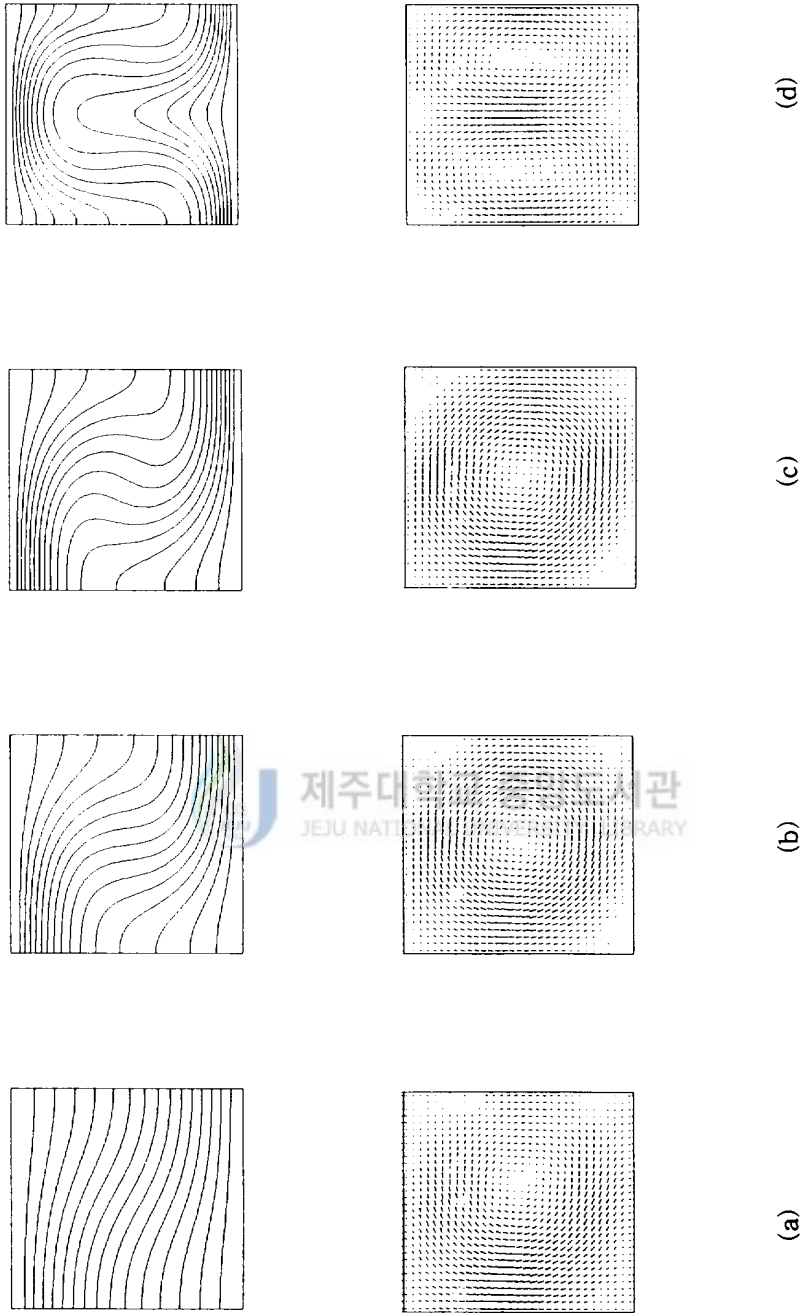


Fig. 14 Contour of isotherms(top diagram) and velocity vector fields(bottom diagram) for $Pr=0.05$; (a) $Ra=2000$, (b) $Ra=4000$, (c) $Ra=8000$, (d) $Ra= 15000$

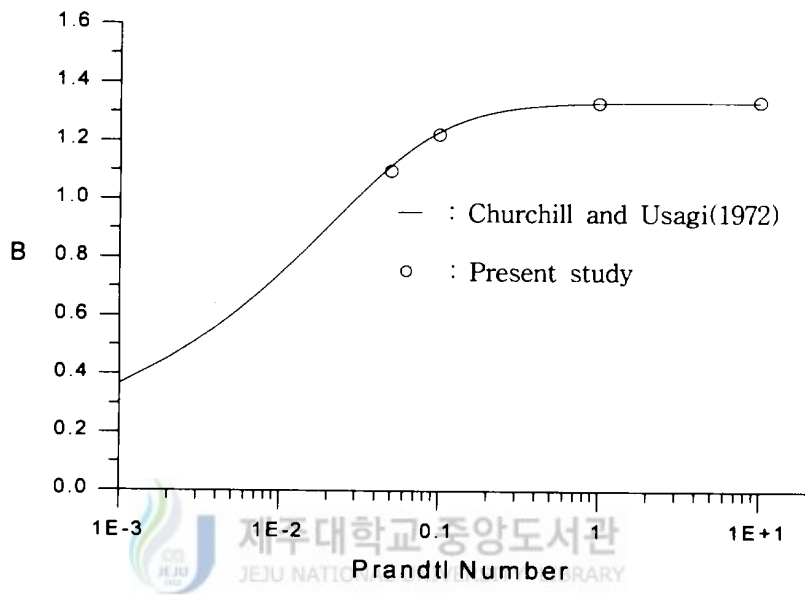


Fig. 15 Plot of the computed constant B with Prandtl number

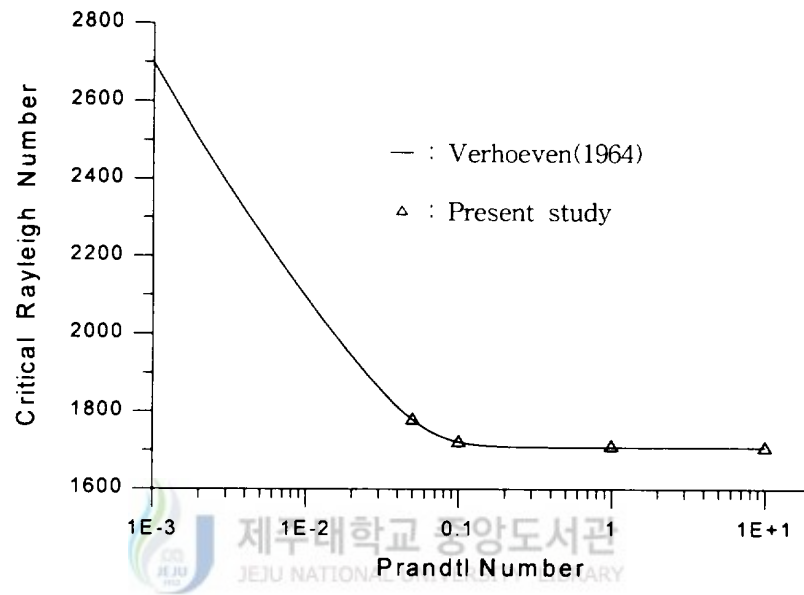


Fig. 16 Plot of the computed critical Rayleigh number with Prandtl number

IV 결 론

본 연구에서는 Rayleigh-Benard대류에 대하여 하부면이 가열되고 (등온), 상부면이 냉각(등온)되며, 수직경계면이 단열된 밀폐용기내의 온도차에 의해 발생하는 자연대류 현상에 대하여 수치해석을 하였다. 이를 통하여 Ra수, Pr수에 따른 유동형태, 온도분포의 특성을 살펴보고 Nu수를 구하였으며 자연대류가 발생하는 임계 Rayleigh수에 대하여 기존의 연구와 비교하였다. 해석범위는 종횡비(A=1), Pr=0.05~10.0, Ra=1750~20000이며, 연구 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. 본 연구의 결과에서 Prandtl수에 따른 임계 Rayleigh수는 Pr=10.0일 때 $Ra_c=1710$, Pr=1.0일 때 $Ra_c=1714$, Pr=0.1일 때 $Ra_c=1725$, Pr=0.05일 때 $Ra_c=1784$ 로 Prandtl수가 감소할수록 임계 Rayleigh수가 다소 증가하였다.
2. Rayleigh수에 따른 평균 Nusselt수는 위로 볼록한 형태를 띄며 임계 Ra수에 가까울수록, Pr수가 증가할수록 더욱 더 볼록한 형태를 보이지만 Pr=0.1일 때는 거의 직선적으로 분포하였고, Pr=0.05일 때는 임계값 근처에서 'S'자 형태로 접근하였다.
3. Rayleigh수가 임계값에 가까우면 미세한 시계방향으로 회전하는 유동이 관찰되고 온도는 불안정하게 성층화되나, Rayleigh수가 증가할수록 속도 벡터는 찌그러지기 시작하여 'S' 자형태의 온도분포를 보이다가 Rayleigh수가 아주 큰 경우에는 두개의 셀이 대칭으로 회전하는 현상을 보였다.

참고문헌

- Benard, H., 1901, Les Tourbillons Cellulaires dans une nappe Liquide Transportant de la chaleur par Convection en Regime Permanent, *Ann. Chem. Phys.*, vol. 23, pp. 62-144.
- Bertin Henri and Ozoe Hiroyuki, 1985, Numerical study of two-dimensional natural convection in a horizontal fluid layer heated from below, by finite-element method influence of Prandtl number.
- Chandrasekhar, S., 1961, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Oxford, Oxford University Press.
- Chao, P. S., Churchill, W. and Ozoe, H., 1982, The dependence of the critical Rayleigh number. In *Convection Transport and Instability Phenomena*, edited by J. Zierep and H. Oertel. G. Braun, Karlsruhe.
- Churchill, S. W. and Usagi, R., 1972, A general expression for the correlation of rate of transfer and other phenomena, *A. I. Ch. E. Jl* 18, pp. 1121-1128.
- Drakhlm, E., 1952, On Spherical Convection in an Enclosure, *Soviet Journal of Technical Physics*, Vol. 22, pp. 829-832.
- Fu, B. I., and Ostrach, S., 1981, The Effects of Stabilizing Thermal Gradients on Natural Convection Flows in a Square Enclosure, *Natural Convection*, I. Catton and R. N. Smith, eds., ASME HTD-Vol. 16, pp.91-104.
- Kim Min-Chan, 1992, The Onset of Natural Convection and Heat Transfer Correlations in Systems Experiencing Thermal Boundary Layer Characteristics 서울대학교 대학원 박사학위논문.

-
- Koshmieder, E. L., 1974 Benard convection, *Adv. chem. Phys.* 26, pp. 177-211.
- J. D. Verhoeven, 1964, Experimental study of thermal convection in a vertical cylinder of mercury heated from below, *Phys. Fluids* 12, pp. 1733-1740.
- Lord Rayleigh, 1916, On Convection Current in a Horizontal Layer of Fluid when the Higher Temperature is on the Under side, *Philos. Mag.*, vol. 32, pp. 520-546.
- Malkus, M. V. R. and Veronis, G., 1958, Finite amplitude cellular convection, *J. Fluid Mech.*, Vol. 4, pp. 225-260.
- Ostrach, S., 1964, Laminar Flows With Body Forces, *High Speed Aerodynamics and Jet Propulsion*, vol. 4, Theory of Laminar Flows, F. K. Moore, ed., Princeton University Press, pp. 528-718.
- Ostrach, S., 1972, Natural Convection in Enclosures, *Advances in Heat Transfer*, vol. 8, Academic Press, New York, pp. 161-227.
- Ostrach, S., and Raghavan, C., 1979, Effects of Stabilizing Thermal Gradients on Natural Convection in Rectangular Enclosures, *ASME Journal of Heat Transfer*, Vol. 101, pp. 238-243.
- Ostroumov, G. A., 1952, Free Convection Under Conditions of the Internal Problem, State Publishing House, Technio-Theoretical Literature, Moscow, Leningrad, (also available as NACA TM 1407, 1958)
- Ozoe, H. K., Fujii, N., Lior and Churchill, S. W., 1983, Long rolls generated by natural convection in an inclined, rectangular enclosure, *Int. J. Heat Mass Transfer* 26, pp. 1427-1438.