



저작자표시 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.
- 이차적 저작물을 작성할 수 있습니다.
- 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:



저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 [이용허락규약\(Legal Code\)](#)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

[Disclaimer](#) 

碩士學位論文

로버스트 변동성 추정값을 이용한
옵션의 헤지에 대한 연구

濟州大學校 大學院

電算統計學科

金 仁 京

2012年 12月

로버스트 변동성 추정값을 이용한 옵션의 헤지에 대한 연구

指導教授 宋 峻 模

金 仁 京

이 論文을 理學 碩士學位 論文으로 提出함

2012年 12月

金仁京의 理學 碩士學位 論文을 認准함

審査委員長 _____ (印)

委 員 _____ (印)

委 員 _____ (印)

濟州大學校 大學院

2012年 12月

목 차

표 목 차	i
그림목차	ii
국문초록	iii
제 1 장 서론	1
제 1 절 연구의 목적	1
제 2 절 논문의 구성	4
제 2 장 이론적 배경	5
제 1 절 블랙-숄즈 옵션가격 결정 이론	5
1. 기하 브라운 운동	5
2. 블랙-숄즈 모형	6
제 2 절 옵션의 동적 델타 헤지	7
제 3 절 변동성의 추정	10
1. 변동성의 의미	10
2. 역사적 변동성	10
3. 내재변동성	11
3.1 블랙-숄즈 모형	11
제 4 절 로버스트 추정법	13
1. Minimum density power divergence를 이용한 추정방법	13
2. MDPDE를 이용한 로버스트 변동성 추정량의 제안	14
제 3 장 로버스트 추정량을 바탕으로 한 헤지 시뮬레이션	16
제 1 절 자료	16

제 2 절 변동성 추정 결과	17
제 3 절 헤지 시뮬레이션	19
1. 로버스트 변동성 α 값의 범위 제안	25
제 4 장 결론	27
참고문헌	28

표 목차

<표 1> 글로벌 금융위기 이전의 주요종목 변동성	17
<표 2> 글로벌 금융위기 이후의 주요종목 변동성	18
<표 3> 글로벌 금융위기 이전의 A, B그룹 헤지오차	19
<표 4> 글로벌 금융위기 이후의 A, B그룹 헤지오차	20
<표 5> 글로벌 금융위기 이전기간의 A그룹 헤지오차	21
<표 6> 글로벌 금융위기 이전기간의 B그룹 헤지오차	22
<표 7> 글로벌 금융위기 이후기간의 A그룹 헤지오차	23
<표 8> 글로벌 금융위기 이후기간의 B그룹 헤지오차	24
<표 9> 글로벌 금융위기 이전의 α 값 빈도	25
<표 10> 글로벌 금융위기 이후의 α 값 빈도	26

그림 목차

<그림 3-1> 글로벌 금융위기 이전의 α 값 히스토그램	----- 25
<그림 3-2> 글로벌 금융위기 이후의 α 값 히스토그램	----- 26

초 목

변동성(volatility)은 자산의 가격 또는 수익률이 일정기간 동안 얼마나 심하게 변하였는가를 나타내는 개념으로, 변동성이 크다는 것은 시장으로 유입되는 정보의 양이 많아 저 투자자가 이에 반응해 가격이 변한다는 것을 의미한다. 변동성은 기업 가치 평가의 중요한 결정요인으로 작용하기도 하고 주식을 기반으로 하는 파생상품 개발을 가능하게 하며, 가격변동폭 제한 등을 합리적으로 결정하는데 중요한 의미를 갖는다. 그러므로 변동성에 대한 추정과 예측은 금융경제학에서 중요한 관심사이고, 실무에 있어서 투자자들에게도 매우 중요한 정보이다.

금융자산의 변동성은 로그수익률의 표준편차를 바탕으로 하는 단순 역사적 변동성이 일반적으로 사용되고 있으나, 이러한 방법으로 계산된 변동성은 이상치(outlier) 또는 극단값(extreme value)에 영향을 많이 받는 단점을 가지고 있다. 다양한 이벤트가 존재하고 이에 민감한 금융시장의 속성을 고려하면, 단순 역사적 변동성은 실제 평균적인 변동폭을 제대로 추정하지 못할 가능성이 크다. 특히, 이러한 가능성은 변동성이 중요한 역할을 하는 옵션의 헤지 시 부정확한 헤지를 초래하는 또 다른 이유가 될 수 있기 때문에 이상점에 영향을 덜 받는 추정량의 개발은 중요하다고 할 수 있다.

이에 본 연구에서는 이상치에 민감하지 않은 로버스트(robust)한 변동성 추정량을 제안하고, 이 추정량을 바탕으로 옵션의 헤지 실험을 수행하여, 제안된 변동성이 기존의 단순 역사적 변동성의 대안이 될 수 있는지를 확인하고자 한다.

제 1 장 서론

제 1 절 연구의 목적

오늘날 주식시장의 가격변동 위험의 효과적인 관리수단이면서 또한 주식시장에 전체에 대한 투자수단으로 널리 활용되고 있는 것이 옵션시장이라고 할 수 있을 것이다.

공식적으로 세계최초의 장내거래 옵션거래는 1973년 미국의 시카고 옵션거래소(CBOE)에서 16개의 개별주식을 대상으로 한 콜옵션거래이며 주가지수 장내옵션의 효시는 1983년에 CBOE에서 S&P 100지수를 대상으로 한 옵션거래이다. 우리나라에서도 한국거래소(KRX)가 KOSPI 200지수를 대상으로 1997년 7월 7일에 주가지수 옵션거래를 도입하였고 1999년 4월 23일에 한국선물거래소(KOFEX)가 미국달러를 대상으로 통화옵션시장을 개설하는 등 파생금융상품의 본격적인 장내거래 시대가 개막되어 비로소 우리 증권시장도 현물주식, 선물, 옵션 시장을 모두 구비한 종합증권시장으로서의 면모를 갖췄다고 할 수 있다.

1987년 10월의 미국 주식시장의 대폭락(black money), 오랜 역사를 가진 영국의 금융그룹인 베어링사의 몰락, 과거 1997년 말의 금융위기 이후 한국의 IMF관리체제 아래서의 주식시장과 선물 및 옵션시장의 폭락 및 폭등에서 보듯이 시장 내외적인 요인에 의해서 수익률의 급변동을 경험하였고 이러한 상황에서 투자자들이나 시장 참여자, 정책 입안자들에 있어서 주식수익률의 형태뿐만 아니라 그것의 등락내지는 변동성의 움직임에도 큰 관심을 가지게 되었다.

옵션은 옵션소유자에게 약정일에 미리 정한 가격으로 특정한 기초자산을 사거나 팔 수 있는 권리로 미래시점의 자산 가치를 현재 시점에서 예상할 수 있도록 미래에 기초자산의 매수 및 매도할 수 있는 권리를 매매하는 것이라 할 수 있다. 따라서 기초자산의 헤지 수단으로써 옵션의 가격은 위험을 조정하기 위한 비용으로 판단할 수 있기 때문에 정확한 옵션가격의 산출은 중요하다. 이러한 옵션의 가격에 영향을 미치는 변수로는 옵션의 행사가격, 기초자산의 가격, 만기까지의 잔여기간, 기초자산의 가격 변동성, 무위험 수익률, 만기 이전의 행사 가능성 여부 등 여러 가지가 있으나 이들

중 기초자산의 변동성을 제외한 모든 요인은 시장에서 관측가능한 정보이기 때문에 옵션의 가격에 대한 연구에서 핵심이 되는 부분은 시장에서 관찰이 불가능한 기초자산의 가격 변동성에 관한 것이다.

변동성(volatility)은 자산의 가격 또는 수익률이 일정기간 동안 얼마나 심하게 변화하였는가를 나타내는 개념으로, 변동성이 크다는 것은 시장으로 유입되는 정보의 양이 많아 저 투자자가 이에 반응해 가격이 변한다는 것을 의미한다. 변동성은 기업 가치 평가의 중요한 결정요인으로 작용하기도 하고 주식을 기반으로 하는 파생상품 개발을 가능하게 하며, 가격변동폭 제한 등을 합리적으로 결정하는데 중요한 의미를 갖는다. 그러므로 변동성에 대한 추정과 예측은 금융경제학에서 중요한 관심사이고, 실무에 있어서 투자자들에게도 매우 중요한 정보이다.

변동성을 추정하는 방법으로는 크게 두 가지 방법으로 분류할 수 있다. 하나는 주식 및 지수와 같은 불규칙한 금융 시계열에서 과거 수익률을 바탕으로 계산하는 역사적 변동성이다. 역사적 변동성은 객관적인 공식에 의하여 산출되고, 관찰 구간을 변경하거나 다양한 통계적 추정 기법을 동원하여 용도에 맞는 적절한 실현변동성 값을 추출할 수 있다는 장점이 있는 반면, 과거 수익률을 사용하기 때문에 예측력이 떨어진다는 단점이 있다. 또 다른 방법으로는 옵션의 가격에 담겨져 있는 정보, 즉 내재변동성의 시계열 자료에 기초하는 것이다. 내재변동성은 옵션가격결정모형에서 산출된 이론 가격이 시장 가격과 같아지도록 하는 변동성을 의미한다. 즉, CBR, Black-Scholes, Heston 모형 등으로부터 역으로 산출된 기초자산 가격의 변동성으로서 특정 기초자산의 미래변동성에 대한 시장 참여자들의 예측 또는 기대를 반영하는 수치로 볼 수 있다. 내재변동성은 그 당시 실현변동성에 대한 해석이 가능하며 추이에 대한 전망도 수월하나 반대로 옵션가격이 존재해야 계산할 수 있고 방식에 따라 산출되는 수치가 다를 수도 있다는 한계를 포함한다. 또한 다양한 행사가격 별로 각기 다른 수치를 갖는다는 단점도 존재한다.

금융자산의 변동성은 로그수익률의 표준편차를 바탕으로 하는 단순 역사적 변동성이 일반적으로 사용되고 있으나, 이러한 방법으로 계산된 변동성은 extreme value 또는 이상치에 영향을 많이 받는 단점을 가지고 있다. 다양한 이벤트가 존재하고 이에 민감한 금융시장의 속성을 고려하면, 단순 역사적 변동성은 실제 평균적인 변동폭을 제대로 추정하지 못할 가능성이 크다. 특히, 이러한 가능성은 변동성이 중요한 역

할을 하는 옵션의 헤지 시 부정확한 헤지를 초래하는 또 다른 이유가 될 수 있기 때문에 이상치에 영향을 덜 받는 추정량의 개발은 중요하다고 할 수 있다.

이에 본 연구에서는 이상치에 민감하지 않은 로버스트한 변동성 추정량을 제안하고, 이 추정량을 바탕으로 옵션의 헤지 실험을 수행하여, 제안된 변동성이 기존의 단순 역사적 변동성의 대안이 될 수 있는지를 확인하고자 한다.

특히 전 세계적인 신용경색을 초래하였던 글로벌 금융위기 상황에서는 매우 높은 변동성 상황이 상당기간 지속되었으므로 본 논문에서는 2002년 1월 2일부터 2011년 12월 29일까지의 분석기간 중 2002년 1월 2일부터 2007년 6월 30일까지를 글로벌 금융위기 이전 시점으로, 2007년 7월 2일부터 2011년 12월 29일까지를 글로벌 금융위기 이후 시점으로 기간을 구분하여 분석을 하였다.

제 2 절 논문의 구성

본 논문은 다음과 같이 구성하였다.

제2장에서는 블랙-숄즈 옵션가격 결정이론과 옵션의 헤지, 변동성 추정에 대해 기술하고 본 논문에서 사용하게 될 로버스트(robust) 추정법을 소개한다.

제3장에서는 2장에서 소개된 로버스트 추정법을 이용하여 새로운 변동성 추정량을 제안하고 KOSPI200 종목에 대한 옵션의 헤지실험을 수행하여 단순역사적 변동성과의 헤지효율을 비교한다.

제4장에서는 본 논문의 연구결과에 대한 요약과 연구의 한계점을 논의한다.

제 2 장 이론적 배경

제 1 절 블랙-숄즈 옵션가격 결정 이론

블랙-숄즈는 주가에 기하 브라운 운동을 가정하고 유럽형 표준옵션의 가격공식을 유도하였다. 이에 기하브라운 운동을 먼저 살펴보고, 블랙-숄즈의 공식을 살펴보도록 한다.

1. 기하 브라운 운동

“ t 시점에서 주가 S 가 다음 시점인 $t+1$ 에서 어떻게 될 것인가를 모델화”하는데, 주가의 통계적 속성을 잘 반영하는 대표적인 모델이 기하 브라운 운동(Geometric Brownian Motion, 이하 GBM)이며 아래와 같은 가정을 한다.

- i) 주가는 불확실하다.
- ii) 주가변화는 연속적이다.
- iii) 주가는 로그정규분포를 따른다. 즉, 주가의 로그수익률은 정규분포를 따른다.
- iv) 주식의 기대수익률과 수익률의 불확실성은 보유기간에 비례한다.

이러한 가정 하에서 GBM에 따른 주가의 확률과정 모델은 다음과 같다.

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (1)$$

S_t : t 시점의 기초자산 가격

μ : 기초자산의 기대수익률

σ : 기초자산 수익률의 변동성

W_t : 위너 프로세스(wiener process)

$\mu S_t dt$ 는 확정적인 부분으로 추세를 나타내며, $\sigma S_t dW_t$ 는 확률적인 부분으로 불확실성을 나타낸다.

GBM이 로그정규분포를 따른다고 가정하고 있지만 실제 주가의 분포는 첨도가 높고 분포의 꼬리가 두껍게 나타나며 일정한 변동성을 갖는다고 가정하지만 현실에서 주가의 변동성은 일정하지 않고 끊임없이 변하고 있다. 이에 변동성을 모형화한 새로운 모형들이 개발되었다.

2. 블랙-숄즈 모형

블랙-숄즈 모형(Black-Scholes model)은 1970년대 초반에 Fischer Black, Myron Scholes, Robert Merton에 의해 개발된 유럽형 옵션계약의 가격도출을 위한 모형으로 옵션가치평가를 위한 변수들의 추정과 옵션가격결정모형을 설명하기 위해 아래와 같은 가정을 한다.

- i) 주가는 위 (1)의 GBM을 따른다.
- ii) 거래비용과 세금은 없다.
- iii) 옵션 만기일까지 배당은 없다.
- iv) 무위험 차익거래기회는 존재하지 않는다.
- v) 주식의 거래는 연속적으로 이루어질 수 있다.
- vi) 투자자는 무위험이자율로 차입하거나 대출할 수 있다.
- vii) 무위험이자율 r 은 일정하다.

위 가정 하에 Black-Scholes와 Merton은 무배당 주식에 대한 유럽형 콜옵션의 현재시점에서의 가치를 다음과 같이 구하였다.

$$C = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2) \quad (2)$$

식 (2)에서 d_1 과 d_2 는 각각 다음과 같다.

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (3)$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

C : 유럽형 콜옵션 가격

$N(\cdot)$: 누적정규분포 함수로 표준정규분포 $\phi(0,1)$ 을 따르는 변수가 x 보다 작을 확률

S_0 : 현재시점에서의 주가

K : 행사가격

r : 무위험이자율(연속복리)

T : 만기

σ : 주가 변동성

주가에 대한 위 (2)의 블랙-숄즈 가격공식의 일차 편미분으로 정의되는 델타는 다음과 같으며, 옵션의 동적헤지시 매매해야할 기초자산의 수량을 결정하는 중요한 값이 된다.

$$\text{델타}(\Delta) : \frac{\Delta C_t}{\Delta S_t} = N(d_1) \quad (4)$$

제 2 절 옵션의 동적 델타 헤지

본 절에서는 블랙-숄츠의 가정 하에 옵션의 동적 델타헤지에 대하여 알아본다. 연속적인 동적 헤지(dynamic hedge) 포트폴리오를 구성하기 위하여 다음을 가정하자. $t(< T)$ 시점에 1개의 옵션을 C 가격에 팔고 Δ 만큼의 주식을 S 가격에 샀으며, $(C-\Delta S)$ 만큼의 현금을 무위험 자산에 투자하였을 때, 이 포트폴리오는 t 시점에서의 가치로 0을 가지며 dt 만큼의 시간이 흐른 뒤의 가치변화는 다음과 같다.

$$-dC + \Delta dS + (C - \Delta S)rdt \quad (5)$$

Ito공식에 의해 옵션의 가치 $C(S, t)$ 는 다음을 만족한다.

$$dC = \frac{\partial C}{\partial S}dS + \frac{\partial C}{\partial t}dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(dS)^2 = \Delta dS + \Theta dt + \frac{1}{2} \Gamma \sigma^2 S^2 dt \quad (6)$$

식(5)에 식(6)을 대입하면 아래의 식(7)을 얻을 수 있는데, 식(7)이 바로 여기에서 구성한 포트폴리오의 가치변화량이다. 식(7)을 보면 dS 항이 없는데, 이는 위와 같이 포트폴리오를 구성하게 되면 기초자산의 변화에 대한 위험이 제거된다는 것을 나타낸다.

$$-\Theta dt - \frac{1}{2} \Gamma \sigma^2 S^2 dt + (c - \Delta S)rdt \quad (7)$$

또한 식(7)은 블랙-숄츠 모형에 의해 산출되는 Θ, Γ, Δ 를 대입하면 0이 되는 것을 알 수 있다. 이러한 결과는 포트폴리오를 연속으로 재구성한다는 가정 하에서 산출되므로 현실에서는 적당히 포트폴리오 재구성 횟수를 정하여야 하며 이로 인하여 오차가 발생할 수밖에 없다. 기초자산의 변동성 또한 연속적으로 변하기 때문에 고정된 변동성을 가정한 블랙-숄츠 모형은 실제 기초자산 가격의 움

직접의 괴리에서 발생하는 오차를 수반하게 된다. 하지만, 본 논문에서는 변동성의 움직임에 따른 오차는 고려하지 않고 블랙-숄즈 가정 하에서의 헤지오차에 대하여 연구하기로 한다.

제 3 절 변동성(volatility)의 추정

1. 변동성의 의미

변동성이란 미래의 발생할 수 있는 자산수익률의 불확실성을 의미한다. 옵션의 이론가격은 동일한 모형을 사용하여 구하더라도 계산하는 사람마다 그 결과가 다르게 나타날 수 있는데 그 이유는 이론가격 계산에 사용하는 변동성을 각기 다른 방식으로 계산했기 때문이다.

실제로 변동성을 구하는 방식에는 여러 가지가 있다. 과거의 기초자산을 가지고 변동성을 산출하기도 하고 수학적 모델을 사용하여 산출하기도 하는데 옵션의 이론가격 산출에 있어서 어떠한 변동성을 사용하였는가 하는 것은 적절한 이론 가격 산출에 매우 중요한 요인이 된다.

2. 역사적 변동성 (historical volatility)

역사적 변동성은 과거의 일정기간 동안 나타난 가격변화 자료로부터 산출한 변동성을 일컫는다. 본 논문에서는 GBM 모형 하에 과거자료를 이용하여 추정된 변동성만을 고려한다. 즉 주식수익률의 변동성이 일정하다는 가정 하에서 변동성을 계산한다.

GBM모형 하에서의 역사적 변동성은 일정한 과거기간 동안의 일변수익률의 표준편차에 1년 동안의 거래일 수의 제곱을 곱한 다음의 값으로 계산된다.

$$HV_t = \sqrt{T} s.d.(r_1, \dots, r_t) \quad (8)$$

HV_t : historical volatility

r_t : $\ln(S_t) - \ln(S_{t-1})$, t 시점 기초자산가격의 로그수익률

T : 1년 동안의 거래일 수

역사적 변동성은 그 추정법이 간편하다는 장점이 있지만, 변동성이 계산될 과거기간을 결정하는 문제가 발생한다. 즉 과거변동성 계산 시 이용될 표본 수 결정의 문제가 생기게 된다. 역사적 변동성 계산 시 이용될 표본의 수가 많은 경우, 기초 자산시장의 환경이 안정적이라는 가정 하에서라면 산출된 변동성 수치의 신뢰도가 제고되지만, 현재에서 너무 먼 과거의 데이터를 사용함으로써 현재 기초자산 시장 상황과 상당히 다른 양상을 보였던 과거 기간의 자료가 포함될 확률이 높아지므로 산출된 변동성 수치의 신뢰성이 하락될 수 있다. 반대로 표본 수가 너무 적은 경우 추정치의 오차가 커지고 극단적인 수치가 나올 가능성이 많다. 따라서 역사적 변동성 계산에 사용될 표본수를 결정하는 것은 중요한 문제가 된다.

3. 내재변동성 (implied volatility)

내재변동성은 옵션의 시장가격에 내포되어 있는 기초자산의 만기시점까지의 미래 변동성에 대한 정보를 기초로 결정된다. 따라서 내재변동성은 옵션가격이 결정될 때 시장참가자들이 기대하는 미래변동성이라고 할 수 있으며 옵션의 실제 시장가격을 이용하여 시장에서 실제 평가되고 있는 변동성을 추정하는 성격으로서 가장 최근의 정보만을 반영하고 있다는 장점이 있다.

3.1 블랙-숄즈 모형 (Black-Scholes Model)에 의한 내재변동성

기초자산의 가격이 GBM을 따른다고 가정하며 배당금이 이산적으로 특정기간에 집중적으로 지급되는 현물의 경우 블랙-숄즈 모형을 이용하여 옵션의 이론가격을 결정하기 위해서는 현물가격에서 배당금의 현재가치를 차감해 주어야 한다. 이러한 과정에 의해 유럽형 콜옵션의 현재시점에서의 가치를 구하는 블랙-숄즈 공식은 다음과 같다.

$$C = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2) \quad (9)$$

C : 유럽형 콜옵션 가격

$N(\bullet)$: 누적정규분포 함수로 표준정규분포 $\phi(0,1)$ 을 따르는 변수가 x 보다 작을 확률

S_0 : 현재시점에서의 주가

K : 행사가격

r : 무위험이자율(연속복리)

T : 만기

식 (9)에서 d_1 과 d_2 는 식(3)과 같다.

위와 같이 블랙-숄즈 모형에 기초자산가격, 금리, 변동성, 만기까지의 일수 등 변수를 투입할 경우 옵션의 이론가격을 계산할 수 있으며 옵션의 가격이 시장에서 결정될 때 옵션의 변동성을 제외한 기타변수를 블랙-숄즈 모형에 대입하면 옵션가격에 내재된 변동성을 얻을 수 있는데 이렇게 산출된 변동성은 시장참여자들이 예상하는 미래변동성을 나타낸다고 볼 수 있으며 이를 내재변동성이라 한다.

제 4 절 로버스트 추정법

로버스트(robust) 추정은 이상치(outlier)나 극단값(extreme value)이 존재할 때 이들의 영향을 크게 받지 않도록 하는 통계적 추정 방법이다. 일반적으로 최우추정량(Maximum Likelihood Estimator)은 이상치나 극단값에 영향을 많이 받는 것으로 알려져 있다. 위 3-2절에서 언급한 역사적 변동성은 GBM 가정 하에서의 최우추정량이기 때문에 이 역시 이상점에 크게 영향을 받을 것으로 예상된다. 따라서, 다양한 이벤트가 존재하고 이에 민감한 금융시장의 속성을 고려하면, 단순 역사적 변동성은 실제 평균적인 변동폭을 제대로 추정하지 못할 가능성이 크다. 특히, 이러한 가능성은 변동성이 중요한 역할을 하는 옵션의 헤지 시 부정확한 헤지를 초래하는 또 다른 이유가 될 수 있기 때문에 이상치에 영향을 덜 받는 추정량의 개발은 중요하다고 할 수 있다.

본 절에서는 로버스트 추정량으로서 Basu와 3인(1998)이 제안한 Minimum Density Power Divergence Estimator(이하 MDPDE)를 소개하고, 이를 이용하여 GBM모형에서의 변동성에 대한 로버스트 추정량을 제안한다.

1. Minimum Density Power Divergence Estimator

Basu와 3인(1998)은 두 확률밀도함수 f, g 에 대하여 다음의 density power divergence, $d_\alpha(f, g)$,를 정의하고 이 divergence를 최소화하는 추정량을 제안하였다.

$$d_\alpha(f, g) = \begin{cases} \int \left\{ f^{1+\alpha}(z) + \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)g(z)f^\alpha(z) + \frac{1}{\alpha}g^{1+\alpha}(z) \right\} dz & , \alpha > 0 \\ \int g(z) \{ \log g(z) - \log f(z) \} dz & , \alpha = 0 \end{cases} \quad (10)$$

확률밀도함수 $f_{\theta} \in \{f_{\theta} : \theta \in \Theta\}$ 로부터의 랜덤표본을 X_1, \dots, X_n 이라고 할 때, θ_0 에 대한 MDPDE는 다음과 같이 위 divergence의 empirical version을 최소화하는 값으로 정의된다.

$$\hat{\theta}_{\alpha,n} = \arg \min \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n V_{\alpha}(\theta; X_t) \quad (11)$$

$$V_{\alpha}(\theta; X_t) := \begin{cases} \int f_{\theta}^{1+\alpha}(z) dz - \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) f_{\theta}^{\alpha}(X_t) & , \alpha > 0 \\ -\log f_{\theta}(X_t) & , \alpha = 0 \end{cases}$$

Basu 외 3인(1998)은 위 추정량의 일치성(consistency)과 점근적 정규성(asymptotic normality)을 증명하고 이상치가 있을 때 강건한(robust) 성질이 있음을 보였다. 특히, 0에 가까운 α 에 의한 MDPDE는 이상점이 없는 경우 최우추정량과 효율성에서 큰 차이가 없으면서도 강건한 성질을 가지고 있어 최우추정량의 좋은 대안으로 사용되고 있다.

2. MDPDE를 이용한 로버스트 변동성 추정량의 제안

주가가 위 식(1)의 GBM을 따른다고 가정할 경우, 수익률 r_t 는 평균이 $(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)h$ 이고 분산이 σ^2h 인 정규분포를 따르므로, 모수 $\theta = (\mu, \sigma)$ 에 대한 MDPDE는 정규분포에서의 추정으로 생각할 수 있다. 여기서, h 는 주가의 관찰 간격이다. 따라서, 위 (10)과 (11)에 정규분포를 고려함으로써 다음의 추정량을 제안할 수 있다.

$$\hat{\theta}_{\alpha,n} = \arg \min \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n V_{\alpha}(\theta; X_t) \quad (12)$$

$$V_\alpha(\theta; X_t) := \begin{cases} \int f_\theta^{1+\alpha}(z) dz - \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) f_\theta^\alpha(X_t) & , \alpha > 0 \\ -\log f_\theta(X_t) & , \alpha = 0 \end{cases}$$

$$f_\theta(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 h}} \exp\left(\frac{\{z - (\mu - 0.5\sigma^2)h\}^2}{2\sigma^2 h}\right)$$

위 식은 추세모수 μ 에 대한 추정량도 포함하고 있지만, 본 논문에서는 변동성 σ 에 대해서만 고려하고 μ 는 nuisance parameter로 간주한다.

제 3 장 로버스트 추정량을 바탕으로 한 헤지 시뮬레이션

제 1 절 자료

본 논문에서 사용한 자료의 전체 기간은 2002년 1월 2일부터 2011년 12월 29일까지이지만 글로벌 금융위기 이전 시점인 2002년 1월 2일부터 2007년 6월 30일까지와 2007년 7월 2일부터 2011년 12월 29일까지를 글로벌 금융위기 이후 시점으로 구분하여 분석하였다.

변동성 산출을 위하여 한국거래소의 일별 종가 자료를 사용하였으며 KOSPI200 종목 중에서 117종목을 이용하여 6개월 단위의 데이터를 가지고 단순 역사적변동성과 본 논문에서 제안한 방법을 이용하여 변동성을 추정한 후, 이후 만기 3개월 등가격(At The Money, 이하 ATM) 콜옵션에 대한 헤지 시뮬레이션을 수행하였다.

KOSPI200 종목의 일일 주가 수익률은 다음과 같이 계산하여 사용하였다.

$$r_t = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) \quad (13)$$

r_t : t 시점의 주가 수익률

S_t : t 시점의 종가

S_{t-1} : $(t-1)$ 시점의 종가이다.

제 2 절 변동성 추정 결과

위 1절의 자료에 대하여 식 (8)의 역사적변동성(HV)과 식 (12)의 MDPDE를 이용하여 로버스트 변동성 추정치를 산출하였다. 본 논문에서 α 는 0에서 0.5 사이의 값을 고려한다.

다음은 글로벌 금융위기 이전인 2002년 1월 2일부터 2007년 6월 30일까지의 기간 동안에 6개월 단위로 산출한 역사적변동성과 로버스트 변동성의 평균으로 주요 종목에 대한 결과는 다음과 같다.

<표 1> 글로벌 금융위기 이전의 주요종목 변동성

		HV(%)	로버스트(%)				
			0.025	0.05	0.1	0.3	0.5
삼성전자	평균	32.125	31.485	30.969	29.920	25.579	21.085
	표준편차	10.088	9.928	9.808	9.556	8.334	7.059
POSCO	평균	32.453	31.788	31.253	30.187	25.930	21.247
	표준편차	6.719	6.508	6.339	6.048	5.306	4.985
현대모비스	평균	40.008	39.208	38.561	37.236	31.670	25.418
	표준편차	9.561	9.265	9.010	8.508	6.793	5.831
기아차	평균	40.085	39.270	38.606	37.244	31.477	25.236
	표준편차	7.804	7.785	7.806	7.862	8.016	7.511
LG화학	평균	40.433	39.394	38.515	36.716	29.850	22.523
	표준편차	14.464	14.037	13.676	12.980	10.497	7.834
한국전력	평균	27.490	26.945	26.505	25.604	21.797	17.570
	표준편차	4.854	4.799	4.776	4.765	4.948	5.135
신한지주	평균	38.502	37.608	36.860	35.339	29.536	24.253
	표준편차	11.764	11.351	10.989	10.291	8.304	7.132
현대중공업	평균	42.458	41.624	40.944	39.548	33.487	26.900
	표준편차	6.768	6.555	6.364	5.965	4.277	3.184

위의 표는 금융위기 이전 기간에 추정된 주요 종목의 역사적변동성과 로버스트 변동성의 평균으로 로버스트 변동성의 α 값이 작을수록 역사적변동성과 유사

하게 나타나고 있으며 α 값이 작을수록 데이터의 양 끝에 존재하는 값의 가중치가 줄어들어 추정된 변동성 또한 감소하였으며 어떤 α 값이 변동성 추정에 좋은지는 헤지 시뮬레이션으로 판단한다.

다음은 글로벌 금융위기 이후인 2007년 7월 2일부터 2011년 12월 29일까지의 기간 동안에 6개월 단위로 산출한 역사적변동성과 로버스트 변동성의 평균으로 주요 종목에 대한 결과는 다음과 같다.

<표 2> 글로벌 금융위기 이후의 주요종목 변동성

		HV(%)	로버스트(%)				
			0.025	0.05	0.1	0.3	0.5
삼성전자	평균	34.951	34.217	33.617	32.404	27.581	22.247
	표준편차	9.366	8.918	8.516	7.771	6.083	5.597
POSCO	평균	38.914	37.996	37.232	35.709	29.788	24.134
	표준편차	15.194	14.803	14.463	13.736	10.765	8.699
현대모비스	평균	41.626	40.626	39.782	38.077	31.326	24.275
	표준편차	11.315	10.859	10.443	9.615	7.200	6.671
기아차	평균	50.822	49.691	48.765	46.937	39.773	32.297
	표준편차	20.337	20.036	19.801	19.258	15.829	12.263
LG화학	평균	49.809	47.709	45.323	43.588	36.349	28.316
	표준편차	14.260	12.770	12.585	12.166	10.475	8.788
한국전력	평균	32.656	31.753	30.959	29.299	22.333	16.836
	표준편차	14.703	14.271	13.877	13.015	9.470	7.053
신한지주	평균	41.520	40.615	39.858	38.279	31.197	23.650
	표준편차	17.152	16.759	16.426	15.727	12.693	9.723
현대중공업	평균	51.457	50.237	49.200	47.051	37.589	29.272
	표준편차	18.077	17.712	17.399	16.691	11.904	8.947

위의 표는 글로벌 금융위기 이후 기간에 추정된 주요 종목의 역사적변동성과 로버스트 변동성의 평균으로 글로벌 금융위기 이전보다 변동성이 증가한 것으로 나타났으며 이와 같이 추정된 변동성으로 헤지 시뮬레이션을 시행하였다.

제 3 절 헤지 시뮬레이션

본 절에서는 역사적변동성(HV)과 로버스트한 변동성의 헤지효율을 비교분석하고자 한다.

α 가 0.025일 때의 로버스트 변동성과 역사적변동성의 차이가 1.5%이상인 종목들을 B그룹, 역사적변동성과 가까운 종목들을 A그룹으로 구분하였으며 로버스트 변동성에 대한 헤지오차는 α 값들 중에서 헤지오차가 최소일 때의 값을 선택하여 헤지오차를 비교하였다.

헤지는 각 종목에 대하여 6개월 단위로 추정된 변동성을 가지고 만기 3개월 ATM 콜옵션에 대한 동적 델타 헤지 시뮬레이션을 수행하였다. 그리고 만기 시점에서 옵션의 payoff와 복제된 금액의 차이를 계산하고 기초자산의 초기 가격(또는 행사가) 나눈 값을 헤지오차로 정의하였다.

글로벌 금융위기 이전과 이후기간을 A그룹, B그룹으로 구분하여 헤지오차를 비교한 결과는 다음과 같다.

<표 3> 글로벌 금융위기 이전의 A, B그룹 헤지오차

		금융위기 이전		평균차
		HV	로버스트	
A그룹	평균	1.688	1.443	0.245
	표준편차	1.443	1.313	
B그룹	평균	2.733	2.190	0.544
	표준편차	2.654	2.301	

위의 표는 글로벌 금융위기 이전 기간에서의 헤지오차로 A그룹 전종목에서 역사적변동성의 평균 헤지오차는 1.688%, 로버스트 변동성의 평균 헤지오차는 1.443%로 로버스트 변동성의 평균 헤지오차가 0.245% 더 좋게 나타났으며 B그룹 전종목에서 역사적변동성의 평균 헤지오차는 2.733%이고 로버스트 변동성의 평균 헤지오차는 2.190%로 로버스트 변동성의 평균 헤지오차가 0.544% 더 좋게 나타났다.

A그룹과 B그룹을 비교하였을 때는 A그룹보다 추정된 두 변동성의 평균 헤지 오차의 차이가 크게 나타난 B그룹에서의 헤지효율이 더 좋게 나타났다.

<표 4> 글로벌 금융위기 이후의 A, B그룹 헤지오차

(%)

		금융위기 이후		평균차
		HV(%)	로버스트(%)	
A그룹	평균	2.328	1.888	0.440
	표준편차	2.201	1.816	
B그룹	평균	3.734	3.064	0.670
	표준편차	4.874	4.640	

위의 표는 글로벌 금융위기 이후 기간에서의 헤지오차로 A그룹 전종목에서 역사적변동성의 평균 헤지오차는 2.328%, 로버스트 변동성의 평균 헤지오차는 1.888%로 로버스트 변동성의 평균 헤지오차가 0.440% 더 좋게 나타났으며 B그룹 전종목에서 역사적변동성의 평균 헤지오차는 3.734%이고 로버스트 변동성의 평균 헤지오차는 3.064%로 로버스트 변동성의 평균 헤지오차가 0.670% 더 좋게 나타났다.

A그룹과 B그룹을 비교하였을 때는 A그룹보다 추정된 두 변동성의 평균 헤지 오차의 차이가 크게 나타난 B그룹에서의 헤지효율이 더 좋게 나타났다.

글로벌 금융위기 이전인 2002년 1월 2일부터 2007년 6월 30일까지의 기간에서 A그룹은 86종목, B그룹은 31종목으로 구분되었으며 주요 종목에 대한 결과는 다음과 같다.

<표 5> 글로벌 금융위기 이전기간의 A그룹 헤지오차

		HV(%)	로버스트(%)	α 값	평균차(%)
삼성전자	평균	1.213	1.077	0.2	0.135
	표준편차	1.004	0.788		
POSCO	평균	1.139	1.004	0.2	0.062
	표준편차	0.958	1.016		
현대모비스	평균	1.144	0.857	0.2	0.136
	표준편차	1.101	0.644		
기아차	평균	1.081	1.018	0.075	0.054
	표준편차	0.864	0.601		
한국전력	평균	1.122	1.033	0.15	0.089
	표준편차	0.922	0.989		
신한지주	평균	1.263	1.209	0.025	0.054
	표준편차	1.082	1.041		
현대중공업	평균	1.145	1.094	0.1	0.052
	표준편차	0.782	0.746		
SK텔레콤	평균	1.263	1.017	0.15	0.245
	표준편차	1.107	0.871		
KT&G	평균	1.605	1.328	0.1	0.277
	표준편차	1.342	1.288		
평균		1.219	1.071		0.148

위의 표는 글로벌 금융위기 이전 기간에서 A그룹 주요종목에 대한 헤지오차로 역사적변동성의 평균 헤지오차는 1.219%, 로버스트 변동성의 평균 헤지오차는 1.071%로 두 변동성간의 차이는 0.148%로 나타났으며 로버스트 변동성의 평균 헤지오차가 더 좋게 나타났다.

<표 6> 글로벌 금융위기 이전기간의 B그룹 헤지오차

		HV(%)	로버스트(%)	α 값	평균차(%)
CJ대한통운	평균	1.496	1.235	0.1	0.261
	표준편차	1.414	1.000		
STX	평균	3.133	2.785	0.1	0.349
	표준편차	3.116	3.279		
롯데제과	평균	3.425	2.819	0.1	0.607
	표준편차	2.110	2.826		
이수화학	평균	1.809	1.759	0.075	0.050
	표준편차	1.702	1.363		
일양약품	평균	2.642	2.384	0.05	0.258
	표준편차	2.643	2.430		
파미셀	평균	3.946	3.495	0.15	0.451
	표준편차	3.333	2.874		
한올바이오파마	평균	3.557	3.113	0.15	0.445
	표준편차	2.478	2.913		
평균		2.859	2.513		0.346

위의 표는 글로벌 금융위기 이전 기간에서 B그룹 주요종목에 대한 헤지오차로 역사적변동성의 평균 헤지오차는 2.865%, 로버스트 변동성의 평균 헤지오차는 2.462%로 두 변동성간의 차이는 0.402%로 나타나 로버스트 변동성의 평균 헤지오차가 더 좋게 나타났다.

A그룹과 B그룹을 비교하였을 때는 A그룹보다 추정된 두 변동성의 평균 헤지오차의 차이가 크게 나타난 B그룹의 헤지효율이 좋게 나타났다.

글로벌 금융위기 이후인 2007년 7월 2일부터 2011년 12월 29일까지의 기간에서 A그룹은 90종목, B그룹은 27종목으로 구분되었으며 주요 종목에 대한 결과는 다음과 같다.

<표 7> 글로벌 금융위기 이후기간의 A그룹 헤지오차

		HV(%)	로버스트(%)	α 값	평균차(%)
삼성전자	평균	1.527	1.317	0.15	0.210
	표준편차	1.941	1.676		
POSCO	평균	1.921	1.450	0.3	0.471
	표준편차	2.172	1.349		
현대모비스	평균	1.497	1.287	0.15	0.210
	표준편차	1.322	1.003		
기아차	평균	2.368	2.134	0.3	0.234
	표준편차	2.115	1.763		
한국전력	평균	2.501	2.000	0.3	0.501
	표준편차	2.780	2.633		
신한지주	평균	2.131	1.928	0.075	0.203
	표준편차	2.088	2.059		
현대중공업	평균	2.864	2.085	0.3	0.779
	표준편차	3.313	1.340		
SK텔레콤	평균	1.591	1.515	0.075	0.076
	표준편차	1.560	1.687		
KT&G	평균	1.158	1.134	0.2	0.024
	표준편차	0.713	0.990		
평균		1.951	1.650		0.301

위의 표는 글로벌 금융위기 이후 기간에서 A그룹 주요종목에 대한 헤지오차로 역사적변동성의 평균 헤지오차는 1.951%, 로버스트 변동성의 평균 헤지오차는 1.650%로, 로버스트 변동성의 평균 헤지오차가 0.301% 더 좋게 나타났다.

<표 8> 글로벌 금융위기 이후기간의 B그룹 헤지오차

		HV(%)	로버스트(%)	α 값	평균차(%)
CJ대한통운	평균	2.746	2.273	0.1	0.473
	표준편차	1.802	2.239		
STX	평균	2.893	2.311	0.2	0.582
	표준편차	3.088	2.058		
롯데제과	평균	2.481	2.442	0.025	0.038
	표준편차	2.043	1.985		
이수화학	평균	3.033	2.955	0.1	0.078
	표준편차	2.408	2.274		
일양약품	평균	4.668	4.532	0.3	0.137
	표준편차	4.154	6.790		
과미셀	평균	6.333	4.999	0.075	1.334
	표준편차	7.000	6.791		
한올바이오파마	평균	2.988	2.811	0.075	0.178
	표준편차	2.942	3.382		
평균		3.592	3.189		0.403

위의 표는 글로벌 금융위기 이후 기간에서 B그룹 주요종목에 대한 헤지오차로 역사적변동성의 평균 헤지오차는 3.592%, 로버스트 변동성의 평균 헤지오차는 3.189%로, 로버스트 변동성의 평균 헤지오차가 0.403% 더 좋게 나타났다.

A그룹과 B그룹을 비교하였을 때는 A그룹보다 추정된 두 변동성의 평균 헤지오차의 차이가 크게 나타난 B그룹의 헤지효율이 더 좋게 나타났다.

1. 로버스트 변동성 α 값의 범위 제안

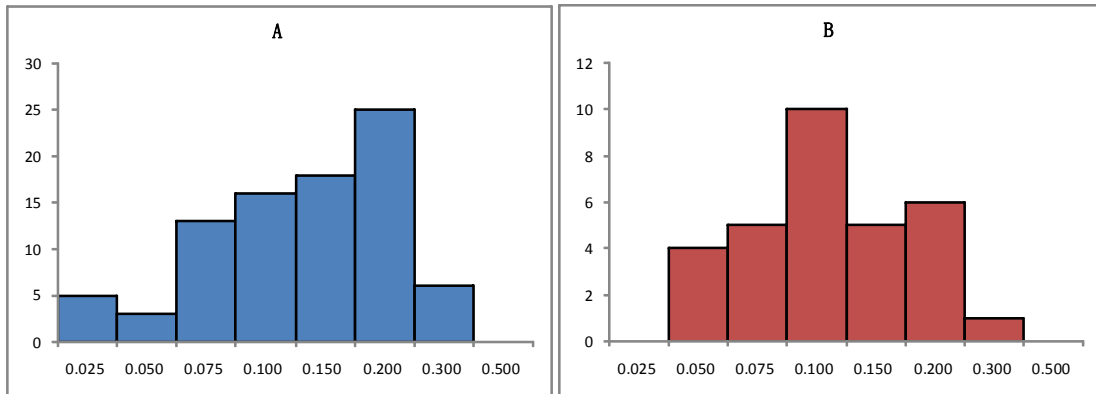
제안한 로버스트 변동성의 헤지효율이 보편적으로 좋게 나타나는 α 값의 범위를 제안하려고 한다.

<표 9> 글로벌 금융위기 이전의 α 값 빈도

	0.025	0.05	0.075	0.1	0.15	0.2	0.3	0.5
A그룹	5 (6%)	3 (3%)	13 (15%)	16 (19%)	18 (21%)	25 (29%)	6 (7%)	0 (0%)
B그룹	0 (0%)	4 (13%)	5 (16%)	10 (32%)	5 (16%)	6 (19%)	1 (3%)	0 (0%)

주) () : 비율

<그림 3-1> 글로벌 금융위기 이전의 α 값 히스토그램



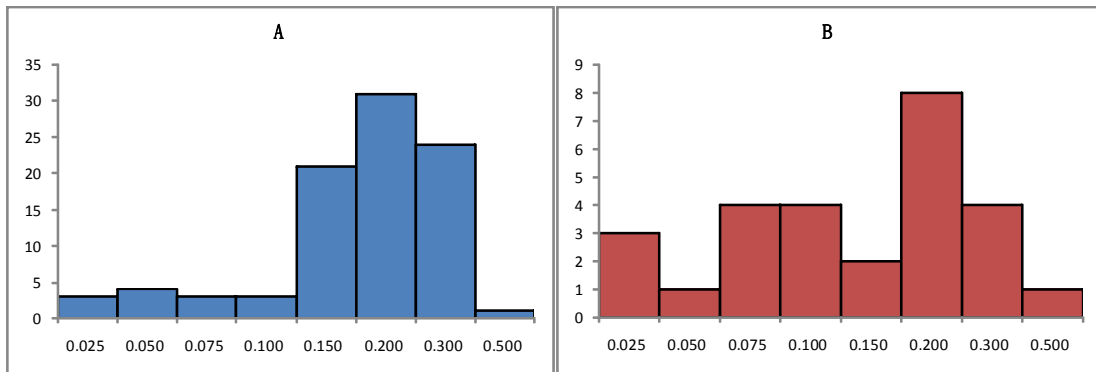
위의 표는 글로벌 금융위기 이후 기간에서 헤지오차가 적게 나타난 α 값의 빈도표와 히스토그램으로 A그룹과 B그룹 모두 84%의 비율로 α 값 0.075 ~ 0.2 범위 내에서 나타났다.

<표 10> 글로벌 금융위기 이후의 α 값 빈도

	0.025	0.05	0.075	0.1	0.15	0.2	0.3	0.5
A그룹	3 (3%)	4 (3%)	3 (3%)	3 (3%)	21 (23%)	21 (34%)	24 (27%)	1 (1%)
B그룹	3 (11%)	1 (4%)	4 (15%)	4 (15%)	2 (7%)	8 (30%)	4 (15%)	1 (4%)

주) () : 비율

<그림 3-2> 글로벌 금융위기 이후의 α 값 히스토그램



위의 표는 글로벌 금융위기 이전 기간에서 헤지오차가 작게 나타난 α 값의 빈도표와 히스토그램으로 A그룹은 84%의 비율로 α 값 0.15 ~ 0.3 범위 내에서 나타났으며, B그룹은 81%의 비율로 α 값 0.075 ~ 0.3 범위 내에서 나타났으며 글로벌 금융위기 이전보다 α 값이 커진 것을 알 수 있다.

제 4 장 결론

옵션가격을 결정하는 주요 변수로서 변동성의 중요성은 이미 널리 알려진 사실이며 그 외에서 금융시장에서 금리, 주가, 환율과 같은 시계열 자료에서와 위험관리 등에서 변동성 예측은 매우 중요한 요인이 되었다.

금융자산의 변동성은 로그수익률의 표준편차를 바탕으로 하는 단순 역사적 변동성이 일반적으로 사용되고 있으나, 이러한 방법으로 계산된 변동성은 극단값 또는 이상치에 영향을 많이 받는 단점을 가지고 있다. 다양한 이벤트가 존재하고 이에 민감한 금융시장의 속성을 고려하면, 단순 역사적 변동성은 실제 평균적인 변동폭을 제대로 추정하지 못할 가능성이 크다.

본 연구에서는 이상치에 민감하지 않은 로버스트한 변동성 추정량을 제안하고, 이 추정량을 바탕으로 옵션의 헤지 시뮬레이션을 수행하여, 제안된 변동성이 기존의 단순 역사적 변동성의 대안이 될 수 있는지를 확인하고자 하였다.

그 결과 분석한 117종목 모두에서 역사적변동성으로 추정한 헤지 결과보다 로버스트 변동성으로 추정한 헤지 결과가 좋게 나타났으며 금융위기 이전과 이후 기간에서 역사적변동성과 로버스트 변동성 간의 차이가 큰 종목들이 속한 B그룹이, 역사적변동성보다 제안한 로버스트 변동성의 헤지효율이 더 좋은 것으로 나타났다.

본 논문에서 제안한 변동성의 헤지 시뮬레이션이 좋은 결과로 나타났지만 로버스트 변동성을 추정할 때 이상치를 제거하는 기준인 α 값에 따라 이상치가 충분히 제거되거나 지나치게 많이 제거될 수 있기 때문에 최적화하는 데에 대한 연구가 필요하며 이상치에 대해 영향을 덜 받는 추정량의 개발은 중요하다고 할 수 있다.

참고문헌

장봉규, 임상규, 이호석 “일반상품 가격을 어떻게 모형화 할 것인가? : 국내 파생결합증권(DLS)의 가치평가”,

최원철 “코스피200지수옵션 실현변동성의 예측력에 관한 연구 : 글로벌 금융위기 전·후시기의 비교를 중심으로”, 2010

민성희 “변동성 추정 : 한국 주식시장 자료 분석”, 2006

유시용 “국내외 금융시장의 변동성을 이용한 KOSPI200 실현변동성 예측력 향상에 관한 연구”, 2010

김병훈 “옵션시장에서의 변동성 추정에 관한 비교분석연구”, 2009

정주혁 “옵션시장에서 극단치이론을 이용한 변동성 추정에 관한 연구”, 2010

이현정 “변동성 측정방법에 따른 KOSPI200 지수의 변동성 예측 비교”, 2010

김재선 “The Asymptotic Optimality of the Minimum Density Power Divergence Estimator with Automatically Selected Tuning Parameter”, 2010

이기홍, 곽승주 “금융공학 프로그래밍”, 한빛미디어, 2009

John C. Hull "Options, Futures, and Other Derivatives", 7th ed., Prentice-Hall, 2009

John C. Hull “Fundamentals of Futures and Options Markets”, 7th ed.,
prentice-Hall

Sheldon M. Ross "An Elementary Introduction to Mathematical Finance
Options and Other Topics", Cambridge University Press, 2nd ed., 2002

John C.Frain “Small sample power of tests of normality when the
alternative is an α -stable distribution”, 2006