

# 時間差分法에 의한 直流電磁石의 過渡磁場解析

左宗根\*, 朴鏞寬\*\*

Analysis of transient magnetic field on DC electromagnet  
by time difference method

Jwa Chong-keun,\* Park Yong-kwan\*\*

## Summary

The transient magnetic field of the DC electromagnet which is taken into account eddy current is analyzed by the finite element method. For the analysis, the time derivative term in the system equation is discretized by each difference method and its algorithm is derived. The computer program is developed by using the proposed algorithm. Then, the applicability of the algorithm is investigated in reference to the steady state solution because the analytic solution to the model is not known.

It is found that; the coefficient matrix of time derivative terms needs to be partitioned to remove the singularity, and the Crank Nicolson method or backward Euler method is suitable among the known methods for the analysis of linear transient magnetic field.

## 序 論

拋物形의 偏微分方程式으로 주어지는 時間領域의 有限要素法에 의한 解析問題로는 渦電流 및 渦電流를 考慮한 磁場解析, 電壓源에 의한 磁場解析, 飽和媒質에서의 解析 및 運動體가 있는 경우의 解析등이 있다.

渦電流場의 支配方程式에는 時間微分項이 포함되고 이 時間微分項을 처리하는 方法으로 Chari

(1974)는 磁性體내에서의 渦電流問題에서 時間微分項을 複素數로 대치하여 解析하였고, 中田等(1985)은 shading coil 電磁石의 特性解析에 時間週期有限要素法(原武等, 1982)을 적용하였으나 전자의 方法은 電源이 非正弦波인 경우에는 적용할 수 없을 뿐더러 過渡狀態解析은 불가능하고 후자의 方法은 時間週期성이 없는 경우에는 적용할 수 없다.

따라서 一般的인 過渡狀態解析에는 差分近似에

\* 工科大學 電氣工學科

\*\* 成均館大學校 電氣工學科

의한 方法이 사용되고 Song et al. (1985)은 整流 電源에 의해 勵磁된 disc brake解析에 前進差分 (forward difference or Euler)法을, Hannalla와 Macdonald (1976)는 同期發電機의 過渡磁場解析에 中央差分 (central difference or Crank Nicolson)法을, Foggia et al. (1975)은 飽和進行磁場解析에 後退差分 (backward difference or backward Euler)法을 사용하였다.

또한 電磁石原理를 이용한 여러가지 制御機器들은 構造上 磁氣鐵心을 塊狀鐵心으로 사용하게 되며 따라서 渦電流에 의한 影響이 그 特性에 크게 作用하게 되므로 이들의 過渡磁場을 解析할 必要가 있다.

이에따라 本 研究에서는 渦電流의 影響을 考慮한 플런저形 直流電磁石의 線形過渡磁場을 解析하기 위해 각 差分法에 대한 알고리즘을 導出하여 프로그램을 완성하였다. 提示된 알고리즘의 適用性을 주어진 모델에 적용하여 定常狀態解에 收斂與否로 檢討하였다.

## 解 析 理 論

### 1. 基礎方程式

Fig.1과 같은 軸對稱 3次元場의 플런저形 電磁石의 過渡磁場을 解析하기 위해 다음 假定을 든다.

i) 磁氣벡터포텐셜 $\vec{A}$ (이하 포텐셜 $\vec{A}$ 라 한다.)는  $\theta$ 方向成分만 가지며 導體의 길이에 따라 크기가 변하지 않는다.

ii) 變位電流는 무시한다.

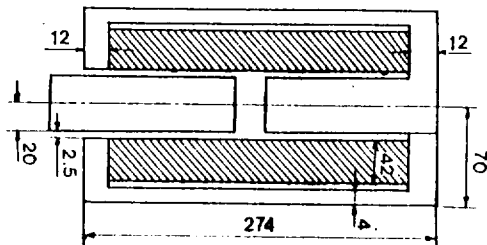


Fig.1. Plunger type electromagnet

iii) 透磁率 $\mu$ 는 單價이고 時不變이다.

iv) 導電率 $\sigma$ 는 常數이다.

v) 溫度의 影響은 무시한다.

이상의 假定外에도 適用方法上 필요한 假定들은 適用理論에서 설정하기로 한다.

포텐셜 $\vec{A}$ 를 사용한 電磁場方程式은

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} \right) = \vec{J}_a + \vec{J}_e \quad (1)$$

로 주어지고, 여기서  $\vec{J}_a$ 는 印加電流密度이고  $\vec{J}_e$ 는 渦電流密度이다. 또한,  $\vec{J}_e$ 는

$$\vec{J}_e = \sigma \vec{E}_e = -\sigma \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \nabla \phi \right) \quad (2)$$

이고,  $\vec{E}_e$ 는 電磁誘導에 의해 생긴 渦電流를 돌리기 위한 電場의 세기이며,  $\phi$ 는 電位로서  $\nabla \phi$ 는  $\nabla \times (\nabla \phi) = 0$ 에 의해 생긴 項이다.

따라서 式(1), (2)로부터

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} \right) = \vec{J}_a - \sigma \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \nabla \phi \right) \quad (3)$$

의 基礎方程式이 얻어진다.

### 2. 有限要素法の 適用

支配方程式은 式(3)에 의해  $\theta$  方向으로만 電流가 흐른다고 할때 위의 假定과  $\nabla \phi = 0$ 으로 놓으면

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mu} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rA) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial A}{\partial z} \right) \right] \\ & = -J_a + \sigma \frac{\partial A}{\partial t} \quad (4) \end{aligned}$$

로 되고, 여기서  $A = A_\theta$ ,  $J_a = J_{a\theta}$ 이다.

이 式에 대한 汎函數는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \chi = & \frac{1}{2\mu} \int_R \left\{ \left( \frac{A}{r} + \frac{\partial A}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial A}{\partial z} \right)^2 \right\} \\ & 2\pi r dr dz - \int_R (J_a A) 2\pi r dr dz \end{aligned}$$

$$+\sigma \int_R \left( \int_0^A \frac{\partial A}{\partial t} dA \right) 2\pi r dr dz \quad (5)$$

여기서 R은 解析領域의 r-z 平面이며 그 境界에서

$$A = \text{一定} \quad (6)$$

또는

$$\frac{\partial A}{\partial n} = 0 \quad (7)$$

이 되도록 잡는다.

解析領域을 1次3角形 要素로 分割하고 變分原理를 適用하여 要素方程式을 구하면 다음과 같다.

$$[P^e] \frac{\partial}{\partial t} \{A^e\} + [S^e] \{A^e\} = \{F^e\} \quad (8)$$

여기서

$$P_{pq}^e = \frac{\sigma \Delta^e}{20} (1 + \delta_{pqe}) (r_0^e + \frac{r_{pe} + r_{qe}}{3}) \quad (9)$$

$$S_{pq}^e = \frac{r_0^e}{4l^e \Delta^e} (c_{pe} c_{qe} + d_{pe} d_{qe}) + \frac{\Delta^e}{9r_0^e} + \frac{1}{6} (c_{pe} + c_{qe}) \quad (10)$$

$$F_{pe}^e = \frac{J_a \Delta^e}{4} (r_0^e + \frac{r_{pe}}{3}) \quad p, q = i, j, k \quad (11)$$

이며,  $\delta_{pqe}$ 는 Kronecker Delta이고  $r_0^e$ 는 要素e 重心의 r座標이다. 또한  $p=i$ 일때

$$b_{ie} = r_{je} z_{ke} - r_{ke} z_{je}, \quad c_{ie} = z_{je} - z_{ke}, \quad d_{ie} = r_{ke} - r_{je} \quad (12)$$

이며  $p=j$  및  $p=k$ 일 때  $i, j, k$ 의 循環式으로 표현된다.

式(8)은 임의의 要素e에 대한 要素方程式이므로 모든 要素에 대하여 計算하고 式(5)에 대한 停留條件에 의하여 이들을 모두 組合하면 다음과 같은 系方程式이 얻어진다.

$$[P] \frac{\partial}{\partial t} \{A\} + [S] \{A\} = \{F\} \quad (13)$$

## 系方程式의 離散化

系方程式의  $\frac{\partial A}{\partial t}$ 를 時間差分에 의해 離散化시키는 方法은 解析하고자 하는 波텐셜의 時間變化를 微小時間幅  $\Delta t$ 로 區分하고 區分된 時間에서는 다음의 假定下에서 離散化한다.

i)  $\Delta t$ 의 區間에서 波텐셜A는 直線의으로 변화한다.

ii) 그 直線의 기울기  $\frac{A_{t+\Delta t} - A_t}{\Delta t}$ 는 區間내 적당한 時刻  $t'$  ( $t \leq t' \leq t + \Delta t$ )에 있어서 波텐셜 曲線의 接線의 기울기와 같다.

이에 따라  $t'$ 에서의 波텐셜A의 기울기는 다음과 같이 된다.

$$\frac{\partial A_{t'}}{\partial t} = \frac{A_{t+\Delta t} - A_t}{\Delta t} \quad (14)$$

여기서  $t'$ 의 값, 즉  $t'=t, t'=t+\Delta t, t'=t+\frac{\Delta t}{2}$ 에 따라 각각 前進, 後退, 中央差分法이라 한다.

式(13)으로 주어진 系方程式의 [P]는 導電率이 있는 部分에서만 要素값이 있는 特異行列이므로 이를 分割하지 않고 差分近似法을 적용하는 경우와 非特異行列이 되도록 分割하여 적용하는 경우에 대한 離散化시킨 結果式들은 다음과 같다.

### 1) 後退差分法

$$\{A_{t+\Delta t}\} = \left( \frac{1}{\Delta t} [P] + [S] \right)^{-1} \frac{1}{\Delta t} [P] \{A_t\} + \left( \frac{1}{\Delta t} [P] + [S] \right)^{-1} \{F_{t+\Delta t}\} \quad (15)$$

### 2) 中央差分法

$$\{A_{t+\Delta t}\} = \left( \frac{2}{\Delta t} [P] + [S] \right)^{-1} \left( \frac{2}{\Delta t} [P] - [S] \right) \{A_t\}$$

$$+ \left(\frac{2}{\Delta t} [P] + [S]\right)^{-1} (\{F_t\} + \{F_{t+\Delta t}\}) \quad (16)$$

3) 前進差分法

$$\begin{aligned} \{A_{t+\Delta t}\} &= \left(\frac{1}{\Delta t} [P]\right)^{-1} \left(\frac{1}{\Delta t} [P] - [S]\right) \{A_t\} \\ &+ \left(\frac{1}{\Delta t} [P]\right)^{-1} \{F_t\} \quad (17) \end{aligned}$$

4) 分割前進差分法

$$\begin{aligned} \{A_{1,t+\Delta t}\} &= \left(\frac{1}{\Delta t} [P_{11}]\right)^{-1} \left(\frac{1}{\Delta t} [P_{11}] - [S'_{11}]\right) \\ \{A_{1,t}\} &+ \left(\frac{1}{\Delta t} [P_{11}]\right)^{-1} \{F'_{1,t}\} \quad (18) \\ \{A_{2,t+\Delta t}\} &= -[S_{22}]^{-1} [S_{21}] \{A_{1,t+\Delta t}\} \\ &+ [S_{22}]^{-1} \{F_{2,t+\Delta t}\} \quad (19) \end{aligned}$$

5) 分割後退差分法

$$\begin{aligned} \{A_{1,t+\Delta t}\} &= \left(\frac{1}{\Delta t} [P_{11}] + [S'_{11}]\right)^{-1} \\ \left(\frac{1}{\Delta t} [P_{11}]\right) \{A_{1,t}\} &+ \left(\frac{1}{\Delta t} [P_{11}] + [S'_{11}]\right)^{-1} \{F'_{1,t+\Delta t}\} \quad (20) \end{aligned}$$

6) 分割中央差分法

$$\begin{aligned} \{A_{1,t+\Delta t}\} &= \left(\frac{2}{\Delta t} [P_{11}] + [S'_{11}]\right)^{-1} \left(\frac{2}{\Delta t} [P_{11}] + [S'_{11}]\right) \{A_{1,t}\} \\ &+ \left(\frac{2}{\Delta t} [P_{11}] + [S'_{11}]\right)^{-1} (\{F'_{1,t}\} + \{F'_{1,t+\Delta t}\}) \quad (21) \end{aligned}$$

7) 分割前進差分法の 다른 方法

$$\begin{aligned} \{A_{1,t+\Delta t}\} &= \left(\frac{1}{\Delta t} [P_{11}]\right)^{-1} \left(\frac{1}{\Delta t} [P_{11}] - [S_{11}]\right) \\ \{A_{1,t}\} &- \left(\frac{1}{\Delta t} [P_{11}]\right)^{-1} [S_{12}] \{A_{2,t}\} + \left(\frac{1}{\Delta t} [P_{11}]\right)^{-1} \{F_{1,t}\} \quad (22) \end{aligned}$$

여기서

$$[S'_{11}] = [S_{11}] - [S_{12}][S_{22}]^{-1}[S_{21}] \quad (23)$$

$$\{F'_1\} = \{F_1\} - [S_{12}][S_{22}]^{-1}\{F_2\} \quad (24)$$

이고 5), 6), 7)의  $\{A_{2,t+\Delta t}\}$ 는 式(19)와 같다.

3)의 前進差分法은 [P]가 特異行列이므로 解를 구할 수 없다.

數值計算 및 檢討

有限要素法에 의하여 構成된 系方程式을 풀기 위하여 導出된 各 差分法의 알고리즘으로 프로그램을 작성하고 플린저形 直流電磁石(Yamada et al, 1976, 別所等, 1978)에 적용하여 檢討한다.

Fig.1과 같은 모델에서 플린저와 스토퍼가 10 [mm] 떨어져 있을때 勵磁코일에 階段形 電壓이 印加되어 指數函數形의 電流가 흐를 때의 磁束分布를 解析한다. 여기서 사용한 座標系는 右手 圓筒座標系이고 入力電流는  $\theta$  方向으로 흐른다고 하고 解析平面을 r-z平面으로 한다. 이 解析모델에서는 z軸을 중심으로 構造가 軸對稱이므로 Fig.2와 같이 r-z平面의 右半面을 택하여 解析하였다.

解析領域을 Fig.3과 같이 分割하였고 分割된 要素數는 654個이며 節點數는 364個이다.

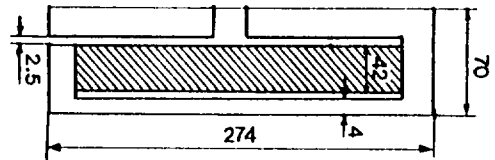


Fig.2. Domain to be analyzed for a plunger type electromagnet

境界條件은 分割圖의 外郭 전체에 固定境界條件으로  $A=0$ 을 주었다.

플린저, 스토퍼 그리고 繼鐵의 導電率은  $1.7 \times 10^6$  (U/m), 比透磁率은 955로 주고 코일과 空氣部分의 導電率은 0 (U/m), 比透磁率은 1로 주었다. 그리고 電流는 定常狀態의 값  $3.8 \times 10^6$  (A/m<sup>2</sup>)인 時定數 20[msec]의 指數函數形을 주었다.

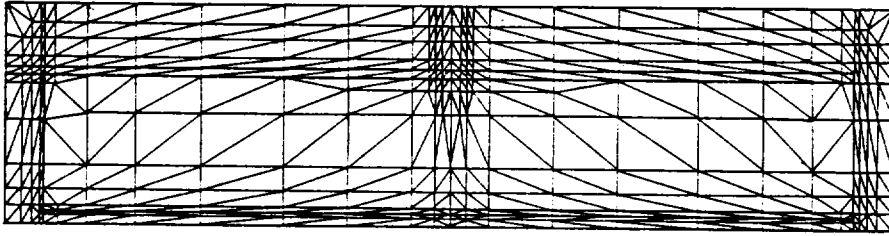


Fig. 3. Element subdivision

각 差分法에 의하여 작성된 프로그램으로  $\Delta t$ 를 변화시켜 100(msec)까지 실행한 結果는 Table 1 과 같다.

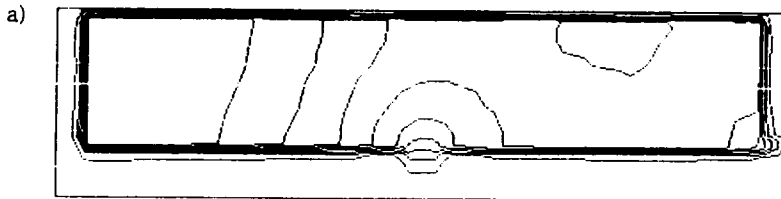
이 Table에서 보는 바와 같이 後退差分法, 分割 後退差分法 및 分割中央差分法이 이 경우의 解析 方法으로 適合하나 後退差分法은  $\Delta t$ 의 選定에 따

라 發散하는 경우가 있음을 알 수 있다.

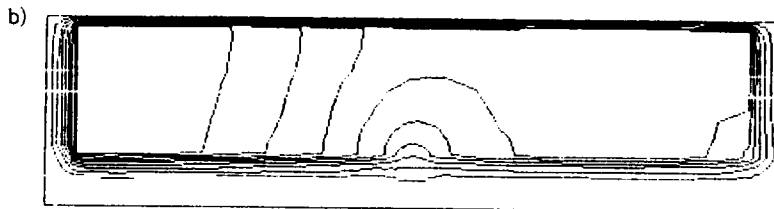
Fig.4는 分割中央差分法에 의한 時間에 따른 磁束分布圖로서 時間經過에 따라 磁束分布가 鐵心에 擴散되는 것을 알 수 있다. 따라서 過渡期의 磁束 分布를 구할 수 있으므로 이 때의 直流電磁石의 特性計算도 가능하다.

method $\Delta t$ (sec)	Backward D.M.	Central D.M.	Partitioned Forward D.M.	Partitioned Backward D.M.	Partitioned Central D.M.	Another Partitioned Forward D.M.
0.010	Converge to steady state value	Oscillation	Possibility of over flow after 0.100	Converge to steady state value	Converge to steady state value	Possibility of over flow after 0.100
0.005	Converge to incorrect steady state value	Oscillation and possibility of over flow	Over flow at 0.055	-	-	Over flow at 0.055
0.001	Over flow at 0.064	Over flow at 0.029	Over flow at 0.013	"	"	Over flow at 0.013

Table 1. Computed results for a plunger type electromagnet (final time 100msec)



t=20 (msec)



t=40 (msec)

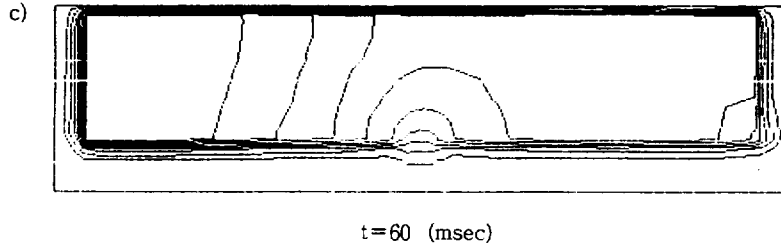


Fig. 4. Flux distribution of a plunger type electromagnet

## 摘 要

直流電磁石의 線形過渡磁界를 解析하기 위해 差分近似法에 의한 알고리즘을 導出하고 프로그램을 작성하여 適用性을 檢討하였다.

提示된 알고리즘을 플런저形 電磁石의 軸對稱 3次元問題에 적용하여 이의 解析解를 구할 수 없으므로 定常狀態解에 收斂與否를 檢討하여 다음과

같은 結果를 얻었다.

1) 導電率을 갖는 係數行列은 非特異行列이 되도록 分割하여 계산하는것이 바람직하다.

2) 差分法으로는 後退差分法이나 中央差分法이 이 경우의 解析에 適合하다.

## 參 考 文 獻

別所一夫, 山田外史, 金丸保典, 1978. 플런저形 直流電磁石의 過渡特性的 解析, 電氣學會論文誌 B, 53-B77, 52-62.

Chari, M.V.K., 1974. Finite Element Solution of the Eddy Current Problem in Magnetic Structures, IEEE Trans. on PAS, vol. PAS-93, No.1, 62-72.

Foggia, A., Sabonnadiere, J. C., and Silvester, P., 1975. Finite Element Solution of Saturated Travelling Magnetic Field Problems, IEEE Trans. on PAS, vol. PAS-94, No.3, 866-871.

Hannalla, A. Y. and Macdonald, D.C., 1976. Numerical Analysis of Transient Field Problems in Electrical Machines, Proc. IEE, vol.123, No.9, 893-898.

原武久, 内藤督, 卯本重郎, 1982. 時間週期有限要

素法による 高壓回轉機 コロナシールド部の 電界 解析, 電氣學會論文誌B, 57-B52, 9-16.

中田高義, 河瀬順洋, 松原孝史, 伊藤昭吉, 1985. 時間週期有限要素法による くり取りコイル付 電磁石의 特性 解析, 電氣學會論文誌B, 60-B55, 57-64.

Song, Z., Xie, D., and Hou, C., 1985. The Finite Element Solution of Transient Axisymmetrical Nonlinear Eddy Current Field Problems, IEEE Trans. on Magnetics, vol. MAG-21, No.6, 2303-2306.

Yamada, S., Kanamaru, Y., and Bessho, K., 1976. The Transient Magnetization Process and Operations in the Plunger Type Electromagnet, IEEE Trans. on Magnetics, vol. MAG-12, No.6, 1056-1058.