科學敎育, 14, 23～32, 1997
Journal of Science education
14, 23～32, 1997

이차 근사식에 대한 교대선형사격 방법

김 도 현*

Alternating Linear Shooting Method for Second Order Approximation

Kim, Do-Hyun

Abstract

We consider a new idea to solve some PDE by using a ODE algorithm. A new method based on shooting method of linear second order ordinary differential equations will be described. And the numerical results show that some conclusions are drawn to solve special cases of second-order partial differential equations.

I. 서 론

응용과학에서 제기되는 많은 문제들이 미분 방정식으로 표시되며, 이들 중 어떤 방정식들의 해의 존재성과 유일성은 수학자들에 의하여 증명되어 있으나 이러한 방정식들 대부분은 일반적인 해법은 없다. 아주 쉬운 예로서 1계 비선형 상미분 방정식을 생각해보자. 변수 분리형, 동차형등 몇가지 특수한 경우를

* 제주대학교 사범대학 수학교육과 교수

제외하고는 해석적 풀이법이 없음을 알고 있다. 응용과학 현장에서는 이들 방정식의 해의 존재성과 유일성으로는 충분하지 못하고 이들 방정식의 구체적인 해답이 필요하다. 완전한 해는 아니더라도 충분히 가까운 근사적 해를 구할 수 있다면 비행기나 자동차 제작,빌딩과 교량 건설, 기상 예보등에 그 해를 이용할 수 있다.

컴퓨터를 이용한 미분방정식의 근사해법은 여러 가지가 있으나 대체로 FDM (Finite Difference Method), FEM(Finite Element Method), Spectral Method 또는 이들의 결합등이 주로 이용되고 있다. FDM은 미분방정식에서 미분을 미분 근사치로 대치하여 차분 방정식으로 변환시켜 차분 방정식의 해로서 근사해를 구하는 방법이며, FEM은 많은 정보를 알고 있는 좋은 함수들의 선형적 결합에 의해 해의 근사치로 삼고자 하는 방법으로, 해영역에 관한 제한은 없지만 컴퓨터 코딩이 복잡하다.
Spectral method 는 Legendre 다항식이나 Chebyshev 다항식등 직교다항식으로 근사해를 표현하는 방법이다. Spectral method 의 결점은 해영역이 사각형이다. 전통적으로 유체역학에서는 FDM 과 Spectral method 가 주로 사용되어 왔고, FEM 은 고체 역학문제 해결에 크게 성공을 이룩했다. 문제의 다양성과 복합성 때문에 이들 방법을 혼합하여 사용함으로 더욱 성공적인 결과를 얻고 있다.

본 논문에서는 어떤 특수한 편미분방정식을 풀기위하여 2계 상미분 방정식의 수치해를 구하는 방법인 사격법에 기초를 둔 새로운 방법을 소개하고 수치적 결과를 보이므로써 그 방법의 특성을 조사한다.

Ⅱ. 선형사격방법

2차 상미분방정식의 경계값문제

$$y'' = f(x, y, y'), \quad a \le x \le b$$

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta$$

를 생각하자. 이러한 문제는 함수f, f_y 와 $f_{y'}$ 이 집합

$$D = \{(x, y, y') \mid a \leq x \leq b, -\infty < y < \infty, -\infty < y' < \infty\}$$

위에서 연속이고, f_y 가 양이고, $f_{y'}$이 유계일때 유일한 해를 갖는다. 이 조건들은 물리학의 경계값 문제들에서 흔히 볼 수 있다.

경계값 문제는 함수 f 가

$$f(x, y, y') = p(x)y' + q(x)y + r(x)$$

의 형태일때 선형이라고 한다. 2계 상미분 방정식의 선형 경계값문제

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, y(b) = \beta$$

의 유일성은 p, q, r가 연속이고 q가 $[a, b]$에서 양임을 보이기만 하면 알 수 있다. 선형 경계값 문제의 유일한 해를 근사시키기 위해, 우선 2개의 초기값 문제를 고려해 보자.

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, \quad y'(a) = 0 \tag{1}$$

$$y'' = p(x)y' + q(x)y, \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = 0, \quad y'(a) = 1 \tag{2}$$

두 문제 모두 유일한 해를 가진다. $y_1(x)$가 식(1)의 해, $y_2(x)$가 식(2)의 해라고 가정하자. 그러면

$$y(x) = y_1(x) + \frac{(\beta - y_1(b))}{y_2(b)} y_2(x)$$

가 다음 선형 경계값 문제

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, y(b) = \beta$$

의 유일한 해가 되는 것은 [1]에서 보여진다.

선형 미분방정식의 사격방법은 경계값 문제를 초기값 문제 (1) 과 (2) 로 대치시켜 풀이하는 것이다. $y_1(x)$ 와 $y_2(x)$의 근사값을 구하기 위해 4차의 Runge-Kutta 방법을 사용할 수 있다.

Ⅲ. ALS 방법

새로운 앨거리즘인 ALS방법을 소개하기 위하여 어떤 2계 편미분 방정식

$$u_{xx} + u_{yy} + p(x,y)u_x + q(x,y)u_y + r(x,y)u = f(x,y) \tag{3}$$

의 수치해 $u(x,y)$를 구하는 방법을 생각 할 것이다.

(3)에서 계수 $p(x,y), q(x,y)$ 와 $r(x,y)$는 xy-평면의 어떤 직사각형 영역 Ω 에서 연속이고 $r(x,y) > 0$ 이라고 하자. 그리고 $u(x,y)$는 Ω의 경계에서 어떤 조건을 만족한다고 하자.

이러한 조건을 만족하는 편미분 방정식은 유일한 해를 갖는다.

(3)에서, $\Omega = (a,b) \times (c,d)$ 라 하자.

새 방법의 첫단계는 정수 m 과 n 를 선택하는 것이고 $h = \frac{b-a}{m}$, $k = \frac{d-c}{n}$ 로 정의한다.

등간격 h로 구간$[a,b]$를 m개로 나누고 등간격 k로 구간$[c,d]$를 n개로 나누는 것은 좌표 (x_i, y_j)를 가진 점들을 통하는 수직선과 수평선을 그음으로써 직사각형 Ω에서 격자점을 만들게 된다. 여기서 $i = 0,1,2,...,m$에 대하여 $x_i = a + ih$이고 $j = 0,1,2,...,n$에 대하여 $y_j = c + jk$이다. 방정식 (3)으로 부터

$$u_{xx} + p(x,y)u_x + r(x,y)u = f(x,y) - u_{yy} - q(x,y)u_y \tag{4}$$

이고

$$u_{yy} + q(x,y)u_y + r(x,y)u = f(x,y) - u_{xx} - p(x,y)u_x \tag{5}$$

이다.

위의 방정식 (4)와 (5)에서 오른쪽의 u_x, u_y, u_{xx} 와 u_{yy}에 대하여 격자점과

$$u_x = \frac{u(x_{i+1}, y_j) - u(x_{i-1}, y_j)}{2h}, \quad u_{xx} = \frac{u(x_{i+1}, y_j) + u(x_{i-1}, y_j) - 2u(x_i, y_j)}{h^2}$$

$$u_y = \frac{u(x_i, y_{j+1}) - u(x_i, y_{j-1})}{2k}, \quad u_{yy} = \frac{u(x_i, y_{j+1}) + u(x_i, y_{j-1}) - 2u(x_i, y_j)}{k^2}$$

를 사용하라. 그러면 x와 y 각각에 대한 선형상미분 방정식계를 얻는다.

$$\begin{aligned} & u_{xx}(x, y_j) + p(x, y_j) u_x(x, y_j) + r(x, y_j) u(x, y_j) \\ &= f(x, y_j) - \frac{u(x_i, y_{j+1}) + u(x_i, y_{j-1}) - 2u(x_i, y_j)}{k^2} \\ &\quad - q(x, y_j) \frac{u(x_i, y_{j+1}) - u(x_i, y_{j-1})}{2k} \qquad (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & u_{yy}(x_i, y) + q(x_i, y) u_y(x_i, y) + r(x_i, y) u(x_i, y) \\ &= f(x_i, y) - \frac{u(x_{i+1}, y_j) + u(x_{i-1}, y_j) - 2u(x_i, y_j)}{h^2} \\ &\quad - p(x_i, y) \frac{u(x_{i+1}, y_j) - u(x_{i-1}, y_j)}{2h} \qquad (7) \end{aligned}$$

u는 알 수 없기 때문에 , 우리는 (6)의 오른쪽 u 를 초기근사치 $u^{(0)}$로 치환한다. (6)에 대하여 x방향으로 선형사격방법을 사용하여 $u(x, y)$의 근사치를 계산하고 그 근사치를 $u^{(1/2)}$로 쓴다. 그리고 (7)의 오른쪽의 u를 $u^{(1/2)}$로 치환하고 (7)에 대하여 y방향으로 선형사격방법을 사용하면 u의 첫번째 근사치 $u^{(1)}$를 얻을 수 있다. 일반적으로 , 주어진 $u^{(k)}$에서 우리는 먼저 (6)로부터 $u^{(k+1/2)}$를 계산하고 이 값을 두번째 식(7)의 오른쪽에 치환하고 $u^{(k+1)}$를 계산할 수 있다.

새로운 방법인 ALSX 앨거리즘은 다음과 같이 서술된다.

앨거리즘 1 : ALSX

1. 초기 근사해 $u^{(0)}$를 정한다.

$i = 0, 1, 2, \ldots$ 에 대하여 구하는 근사값이 나올때까지 다음 과정 2-6을 반복 시행한다.

2. 방정식(6)의 오른쪽 u대신에 $u^{(i)}$로 치환한다.
3. 방정식 (6)에 x방향으로 선형사격법을 사용해서 $u^{(i+1/2)}$를 계산하라.
4. 방정식(7)의 오른쪽 u에 $u^{(i+1/2)}$로 치환하라.
5. 방정식(7)에 y방향으로 선형사격법을 사용해서 $u^{(i+1)}$ 를 계산하라.
6. $u^{(i+1)}$ 가 원하는 해가 아니면 $u^{(i)}$ 를 $u^{(i+1)}$ 로 치환하고 과정2로 돌아간다.

한편, 우리는 (7) 의 오른쪽 u 를 $u^{(k)}$ 로 치환하고 (7) 로 부터 $u^{(k+1/2)}$ 를 계산하고, 이 값을 (6) 의 오른쪽 u 에 치환하여 $u^{(k+1)}$ 를 계산한다.

ALSY 앨거리즘은 다음과 같다.

앨거리즘 2 : ALSY

1. 초기 근사해 $u^{(0)}$를 취한다.

$i = 0, 1, 2, \ldots$ 에 대하여 구하는 근사값이 나올때까지 다음 과정 2-6을 반복 시행한다.

2. 방정식(7)의 오른쪽 u대신에 $u^{(i)}$로 치환한다.
3. 방정식(7)에 y방향으로 선형사격법을 사용해서 $u^{(i+1/2)}$를 계산하라.
4. 방정식(6)의 오른쪽 u에 $u^{(i+1/2)}$로 치환하라.
5. 방정식(6)에 x 방향으로 선형사격법을 사용해서 $u^{(i+1)}$를 계산하라.
6. $u^{(i+1)}$ 가 원하는 해가 아니면 $u^{(i)}$를 $u^{(i+1)}$로 치환하고 과정2로 돌아간다.

IV. 수치적 결과

2절에서 소개된 ALS 앨거리즘을 다음 4개의 예들에 적용했다.

문제 1.

다음 편미분 방정식의 근사해를 구하여라.

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 12.5\pi^2 u = -25\pi^2 \sin\frac{5\pi}{2}x \sin\frac{5\pi}{2}y$

$0 < x, y < 0.4$, 경계조건은 $u(x,y) = 0$.

이 방정식의 실제적인 해는 $u(x,y) = \sin\frac{5\pi}{2}x \sin\frac{5\pi}{2}y$ 이다.

문제 2.

다음 편미분 방정식을 생각하라.

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} - 8u = -4xy^3 - 7x - 7y$, $0 < x, y < 1$, 경계조건은

$u = y \quad : \quad x = 0$

$u = x \quad : \quad y = 0$

$u = y^3 + 2y + 1 \quad : \quad x = 1$

$u = 3x + 1 \quad : \quad y = 1$

이 방정식의 이론적인 해는 $u(x,y) = xy^3 + xy + x + y$이다.

문제 3.

다음 편미분 방정식을 생각하라.

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} - 4u = 4xy - 3x - 3y$, $0 < x, y < 1$, 경계조건은

$u = y \quad : \quad x = 0$

$u = x \quad : \quad y = 0$

$u = 3y + 1 \quad : \quad x = 1$

$u = x^3 + 2x + 1$: $y = 1$

이 문제의 실제적인 해는 $u = x^3y + xy + x + y$ 이다.

문제 4 .

다음 편미분 방정식을 생각하라.

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} - 6u = 6x^3y + 6xy^3 - 4x^2 - 5y - 4,\ 0 < x, y < 1$, 경계조건은

$u = y + 1$: $x = 0$

$u = x^2 + 1$: $y = 0$

$u = y^3 + y + 2$: $x = 1$

$u = x^3 + x^2 + 2$: $y = 1$

이 문제의 이론적인 해는 $u = x^3y^3 + x^2 + y + 1$ 이다.

앨거리즘 ALSX와 ALSY를 사용해서 4문제를 풀었다.

문제1,문제2,문제3,문제4 각각의 결과는 표1,표2,표3,표4에 나타난다. 표에서 m 과 n는 $m = \frac{b-a}{h}$, $n = \frac{d-c}{k}$ 를 나타낸다.

컴퓨터는 워크스테이션을 사용했다.

표 1 : 200 번 반복 후에 문제1의 실제적인 오차

		$u^{(0)} = 1$		$u^{(0)} =$ 정확한 해	
m	n	ALSX	ALSY	ALSX	ALSY
20	20	0.00102095	0.00102095	0.00102095	0.00102095
50	50	0.00016431	0.00016431	0.00016431	0.00016431
100	100	$4.79365e-05$	$4.79365e-05$	$4.1119e-05$	$4.1119e-05$
200	200	$2.04566e-05$	$2.04566e-05$	$1.02801e-05$	$1.02801e-05$

표 2 : 200 번 반복 후에 문제2의 실제적인 오차

		$u^{(0)} = 1$		$u^{(0)} =$ 정확한 해	
m	n	ALSX	ALSY	ALSX	ALSY
20	20	0.00326642	0.000334953	0.00326642	0.000334953
50	50	0.00200302	$8.55839e-05$	0.00200302	$8.55839e-05$
100	100	0.00139801	$2.95456e-05$	0.00139799	$3.02581e-05$
200	200	0.00100299	$5.28291e-05$	0.000981176	$1.06483e-05$

표 3 : 200 번 반복 후에 문제3의 실제적인 오차

		$u^{(0)} = 1$		$u^{(0)} =$ 정확한 해	
m	n	ALSX	ALSY	ALSX	ALSY
20	20	0.000590018	0.00520537	0.000590018	0.00520537
50	50	0.000147893	0.00320349	0.000147893	0.00320348
100	100	$5.09118e-05$	0.00223822	$5.18081e-05$	0.00223734
200	200	$6.62195e-05$	0.00158172	$1.81028e-05$	0.00157055

표 4 : 200 번 반복 후에 문제4의 실제적인 오차

		$u^{(0)} = 1$		$u^{(0)} =$ 정확한 해	
m	n	ALSX	ALSY	ALSX	ALSY
20	20	0.00302575	0.0054409	0.00302575	0.0054409
50	50	0.00194275	0.00340483	0.00194247	0.00340482
100	100	0.00136931	0.0023869	0.00136932	0.00238687
200	200	0.000965089	0.00167855	0.00096432	0.00167797

V. 결 론

이 절에서는 두 방법을 사용해서 얻어진 수치적 결과를 분석한다. 표1에서 ALSX 와 ALSY의 수치적 결과는 같다는 것을 알 수 있다.

표2에서는 ALSX는 ALSY보다 더 좋은 결과를 준다. 그러나 표3과 표4에서는 ALSY가 ALSX보다 더 좋은 결과를 가져온다는 것을 보여준다.

따라서 다음 결과 (1),(2),(3)을 얻었다.

(1) $u(x,y)$가 x와 y에 대하여 대칭이면 ALSX와 ALSY를 사용한 결과는 같다.

(2) $u(x,y)$에 대한 x의 멱(power)이 y의 멱보다 크다면 ALSX를 사용하라. 그렇지 않으면 ALSY를 사용하라.

(3) h가 감소하면 실제적인 오차는 감소한다.

이 방법들은 Hermite spline보간법과 외삽법에 의해서 개선될 수 있는 지가 미래의 연구 과제가 될 것이다. 더불어 오차를 추정하여 보는것도 재미있을 것이고 다른 방법들을 사용해서 얻은 계산결과와 비교 분석하는 것도 미래의 연구과제가 될 것이다.

참 고 문 헌

1. H.B.Keller, Numerical Solution for Two-point Boundary-Value Problems, CB MS-NSF,Mass, 1975

2. A.R.Mitchell, Computational Methods in Partial Differential Equations, John Wiley & Sons,1976

3. W.F.Ames, Numerical Analysis for Partial Differential Equations, Academic Press, New York,1977

4. Burden and Faires, Numerical Analysis (5th Edition), PWS Publishing Company, 1993