

## 2차원 트러스 구조물의 손상 추정에 적용된 손상지표의 유효성 및 수렴성에 관한 연구

서 일 교\* · 은 회 창\*

### The Effectiveness and Convergency of Damage Measures for Damage Identification of 2-Dimensional Truss Structures

Ill-Gyo Suh\* and Hee-Chang Eun\*

#### ABSTRACT

In this paper, a study of the effectiveness and convergency of five damage measures for structural damage detection of 2-dimensional truss structure using the extended Kalman filtering algorithm is presented. These damage measures are associated with the change in mode shape due to structural damage. Damage measures contain the change of natural frequency, mode shape and curvature of mode shape. The effectiveness and convergency of these damage measures by using extended Kalman filtering algorithm are demonstrated with the numerical examples.

**Key words** : Damage identification, damage measures, extended Kalman filter, truss structures

#### 1. 서 론

최근 내구성과 안전성의 측면에서 기존 구조물의 내구연한을 합리적으로 예측할 필요성이 인식됨에 따라 유지, 보수 및 교체 등을 위해 구조물의 손상위치를 추정하고, 손상정도를 평가하는 방법을 개발하는 것이 중요한 과제가 되고 있다.<sup>1-3)</sup>

그러나 손상부를 파악하고자 하는 경우 그 위치나 정도를 정확히 알아내는 것은 매우 어려운 일이다. 이러한 기존 구조물 내부의 손상부 추정 등을 수행하는데 역문제해석은 매우 유용하여 최근 많은 관심을

끌고 있다<sup>1)</sup>. 특히 실험에 의해 측정된 손상 전과 손상 후의 구조물의 진동특성 변화를 이용하여 확률적으로 손상을 탐지하는 방법에 대한 연구가 많이 제시되고 있다. 최근에는 시스템과 측정 데이터의 잡음을 고려할 수 있는 필터이론을 적용한 방법이 다수 제시되고 있다.<sup>2-5)</sup> 이러한 손상추정법을 적용하는 경우 측정데이터에 의해 적용되는 손상지표는 다양하게 적용할 수 있으며 손상지표의 적용에 따라 결과에 큰 영향을 미치게 된다. 그러나 필터 이론을 적용할 때 이러한 손상지표에 의한 해의 수렴성과 유효성에 대한 연구는 거의 이루어지고 있지 않다.

따라서 본 연구는 구조물 내부의 손상부 추정을 수행하는 데 적용되는 역문제 해석을 대상으로 관측 잡음을 고려한 비선형 시스템에 대한 확장 칼만 필터

\* 제주대학교 공과대학 건축공학과  
Dept. of Architectural Eng. Cheju Nat'l Univ.

(extended Kalman filter)이론<sup>6,7)</sup>을 적용하며, 해석 대상인 2차원 트러스 구조물의 손상을 추정하기 위해 관측지표로서 채택한 고유진동수, 모드 형상 진폭 및 곡률, 정적하중에 의한 변위 및 곡률에 대하여 그 유효성 및 수렴성을 조사하여 손상추정에서 효율적이며 보다 정밀한 해석이 가능하게 하는데 목적이 있다.

## II. 확장칼만필터

확장 칼만 필터 이론은 선형 시스템을 대상으로 하는 칼만 필터 이론을 비선형 문제에 확장 적용시킨 필터이론으로, 다음의 이산시간 확률시스템을 대상으로 한다.<sup>6)</sup>

<상태방정식>

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{f}_t(\mathbf{x}_t) + \mathbf{g}_t(\mathbf{x}_t) \boldsymbol{\omega}_t \quad (1)$$

<관측방정식>

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{h}_t(\mathbf{x}_t) + \boldsymbol{\nu}_t \quad t \geq 0 \quad (2)$$

$\mathbf{x}_t$ 는 n차원 상태벡터,  $\mathbf{y}_t$ 는 p차원 관측벡터이다. 시스템잡음, 관측잡음 및 초기치  $\boldsymbol{\omega}_t, \boldsymbol{\nu}_t, \mathbf{x}_0$ 는 가우스확률벡터로서 확률변수 벡터 및 공분산행렬은 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{x}_0\} &= \overline{\mathbf{x}_0}, \quad E\{\boldsymbol{\omega}_t\} = E\{\boldsymbol{\nu}_t\} = \mathbf{0} \\ E\left\{\begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega}_t \\ \boldsymbol{\nu}_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega}_t^T & \boldsymbol{\nu}_t^T \end{pmatrix}\right\} &= \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_t & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_t \end{pmatrix} \delta_{tt} \\ E\{(\mathbf{x}_0 - \overline{\mathbf{x}_0})(\mathbf{x}_0 - \overline{\mathbf{x}_0})^T\} &= \boldsymbol{\Sigma}_0 \end{aligned} \quad (3)$$

여기서,  $\delta_{tt}$ 는 kronecker 델타이고, E는 기대치 연산 기호이다.  $\mathbf{x}_0$ 는  $\boldsymbol{\omega}_t, \boldsymbol{\nu}_t$  와는 독립으로 한다.

이상과 같이 선형화된 이산시간 확률시스템에 대한 확장 칼만 필터는 다음과 같다.

< 필터 방정식 >

$$\hat{\mathbf{x}}_{t+1/t} = \mathbf{f}_t(\hat{\mathbf{x}}_{t/t})$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{t/t} = \hat{\mathbf{x}}_{t/t-1} + \mathbf{K}_t[\mathbf{y}_t - \mathbf{h}_t(\hat{\mathbf{x}}_{t/t-1})] \quad (4)$$

< Kalman Gain >

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{P}_{t/t-1} \mathbf{H}_t^T [\mathbf{H}_t \mathbf{P}_{t/t-1} \mathbf{H}_t^T + \mathbf{R}_t]^{-1} \quad (5)$$

< 추정오차 공분산 행렬 >

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{t+1/t} &= \mathbf{F}_t \mathbf{P}_{t/t} \mathbf{F}_t^T + \mathbf{Q}_t \\ \mathbf{P}_{t/t} &= \mathbf{P}_{t/t-1} - \mathbf{K}_t \mathbf{H}_t \mathbf{P}_{t/t-1} \end{aligned} \quad (6)$$

< 초기조건 >

$$\hat{\mathbf{x}}_{0/-1} = \overline{\mathbf{x}_0}, \quad \mathbf{P}_{0/-1} = \boldsymbol{\Sigma}_0 \quad (7)$$

여기서,  $\hat{\mathbf{x}}_{t/t}$ 는 t 스텝에서의 관측벡터  $\mathbf{y}_t$ 에 의해 얻어지는  $\mathbf{x}_t$ 의 추정치이고,  $\mathbf{P}_{t/t}$ 는  $\hat{\mathbf{x}}_{t/t}$ 의 추정오차 공분산 행렬이다.

## III. 손상지표

칼만 필터링 알고리즘을 적용하면 구조물의 손상 추정을 위한 관측데이터를 다양하게 선택할 수 있다. 본 논문에서는 구조물의 손상 전과 손상 후의 진동특성의 변화 및 정적하중 재하시 변위의 변화를 이용하여 손상을 추정한다. 따라서 트러스 구조물의 자유진동에 의해 얻어지는 데이터로 고유진동수, 모드 형상 진폭, 모드 형상 진폭 곡률과 정적하중 재하시 얻어지는 데이터로 절점의 변위, 절점 변위의 곡률을 채택한다. 대상 구조물에 대해 적용하는 5가지 손상지표를 다음과 같이 정의한다.

① 고유 진동수의 변화(CNF)

$\omega_j$ 는 고유치 문제나 구조물의 진동을 모니터링해서 얻은 계측데이터에서 j차 모드의 고유진동수이다. CNF는  $\omega_j$ 가 손상 후 변화된 값이다.

② 모드 형상 진폭의 변화(CMS)

$\phi_{ij}$ 는 고유치 문제나 구조물의 진동을 모니터링해서

얻은 계측데이터에서 절점  $i$ 에서 나타난  $j$ 차 모드의 모드 형상 진폭을 나타낸다. CMS는  $\phi_{ij}$ 가 손상 후 변화된 값이다.

③ 모드 진폭 곡률의 변화(CCMS)

모드 진폭 곡률에 대해 다음과 같이 정의한다.

$$C_{ij} = (\phi_{i-1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i+1,j}) / h^2 \quad (8)$$

여기서  $C_{ij}$ 는 중앙차분법에 의해 구해진 절점  $i$ 에서의  $j$ 차 모드의 곡률을 표시한 것이다.  $h$ 는 절점  $i-1$ 에서  $i+1$ 까지의 거리를 나타낸다.

CCMS는  $C_{ij}$ 가 손상 후 변화된 값이며 축방향에 대하여 2번 미분함으로써 감도를 높인 것이다.

④ 정적 하중에 의한 변위의 변화(CSD)

$\delta_{ij}$ 는 정적 하중을 재하했을 때 절점  $i$ 에서의  $j$ 방향 변위를 표시한다. CSD는  $\delta_{ij}$ 가 손상 후 변화된 값이다.

⑤ 정적 하중에 의한 변위의 곡률의 변화(CCSD)

정적 하중에 의한 변위의 곡률에 대해 다음과 같이 정의한다

$$CD_{ij} = (\delta_{i-1,j} - 2 \times \delta_{i,j} + \delta_{i+1,j}) / h^2 \quad (9)$$

여기서  $CD_{ij}$ 는 중앙차분법에 의해 구해진 절점  $i$ 에서  $j$ 방향 변위의 곡률을 표시한 것이다.  $h$ 는 절점  $i-1$ 에서  $i+1$ 까지의 거리를 나타낸다.

CCSD는  $CD_{ij}$ 가 손상 후 변화된 값이다. 지표는 축방향에 대하여 2번 미분함으로써 감도를 높인 것이다.

IV. 수치해석 예

손상지표의 유효성 및 수렴성을 확인하기 위하여 Fig. 1의 2차원 트러스 구조물에 Table 1과 같은 손상 지표에 대해 각각 4~6가지 case로 나누어 손상추정을 수행하였다. 이 트러스 구조물은 단면적  $A=10\text{cm}^2$ , 영계수  $E=2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ , 밀도  $\rho = 0.00787 \text{ kg/cm}^3$ 이다.

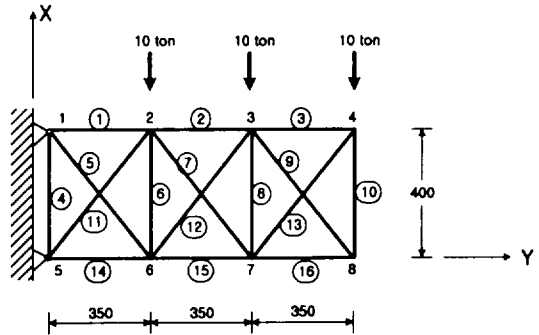


Fig. 1 Analysis model

Table 1. Damage measures

	CNF	CMS	CCMS	CNF + CMS
case 1	1st~4th	x, y directions at nodes 2, 3	x, y directions at nodes 2, 3, 4	CNF case3, CMS case3
case 2	1st~6th	x, y directions at nodes 2, 3, 4	x direction at nodes 2, 3, 4	CNF case2, CMS case3
case 3	1st~12th	x, y directions at all nodes	y direction at nodes 2, 3, 4	CNF case4, CMS case3
case 4	7th~12th	x, y directions at nodes 6, 7, 8	x, y directions at nodes 6, 7, 8	
case 5			x direction at nodes 6, 7, 8	
case 6			y direction at nodes 6, 7, 8	

손상추정을 위한 확률분포로는 관측값은 관측데이터의 30%를 표준편차로 하는 분포로 가정하고 초기조건으로 정상시의 강성을 초기 상태벡터로 한다. 또 감도행렬 계산을 위한 초기치는 정상시의 30%의 손상으로 가정한다.

손상지표는 순해석에 의한 수치해를 사용하였다. 부재 손상도는 부재 강성의 저하로 나타내었다. 강성 저하를 판단하는 강성비는 '손상 후 강성/손상 전 강성'으로 표시한다.

Table 1의 case는 CNF의 경우 저차 모드, 고차 모드 및 전체모드에 대해, CMS는 상부 절점의 자유도, 하부 절점의 자유도 및 전체 자유도에 대해, CCMS는 상하부 절점에 대해서 각각 x방향의 자유도, y방향의 자유도 및 모든 방향의 자유도에 대해서 나누었다. CCMS는 CMS에 대해 2번 미분하여 감도를 높은 지표로서 CMS보다 더 좋은 수렴결과가 예상된다. CNF와 CMS를 조합한 지표는 정보량을 증가시켜 더욱 정확한 결과를 얻고자 하는데 목적이 있다. 여기서 CMS는 1차모드의 값으로 한다.

4.1 단일 부재 손상의 경우

단일 부재의 손상에 대해서는 부재 1, 6, 7이 각각 50% 손상되었을 경우에 대해 고려하였다.

Table 2, 3, 4는 각 손상지표에 따른 결과를 나타내며, ROS(Ratio of stiffness)는 강성비를 Div.은 발산을 나타낸다. 또한 각 Table에 표시된 강성비는 Table 1의 case에 대해 나타내었다. CNF는 손상부재에 대칭되는 부재에 대해서 같은 강성비로 수렴한다. CMS는 저차 모드에서 결과가 좋다. 특히 부재 6 손상의 경우 관측 데이터가 손상 전과 손상 후에 변화가 거의 없어 다른 손상지표에서 수렴이 잘 되지 않았으나 이 지표의 경우 추정결과가 좋다. CCMS는 CMS에 비해 수렴결과가 좋지는 않지만 수렴하는 경우 발산폭이 크지않고 빠르다. CNF와 CMS를 조합

Table 2. Results of damage measures when members 1, 6, 7 are damaged 50% respectively

Damage measure		Member		
		No. 1	No. 6	No. 7
CNF	case	1, 2, 3	발산	1, 2, 3
	ratio of stiffness	0.7	-	0.75
	iteration	70	-	70
CNF+ CMS	case	1, 2, 3	2	1, 2, 3
	ratio of stiffness	0.5	0.55	0.55
	iteration	30	3000	200

Table 3. Results of CMS when members 1, 6, 7 are damaged 50% respectively

member mode	No. 1			No. 6			No. 7		
	case	ROS	iteration	case	ROS	iteration	case	ROS	iteration
1st	1.2 3.4	0.5 0.5	50 30	Div.	1	-	3 4	0.55 0.7	500 300
2nd	Div.	-	-	2, 4 3	0.55 0.5	50 50	1.2	0.65	100
3rd	2 3	0.65 0.4	100 500	Div.	1	-	2 3	0.7 0.5	200 700
4th	3	0.65	2000	Div.	1	-	4	0.25	50
5th	Div.	1	-	Div.	1	-	Div.	1	-
6th	Div.	-	-	1, 2	0.75	10	Div.	-	-
7th	Div.	-	-	Div.	-	-	Div.	-	-
8th	Div.	-	-	Div.	-	-	3	0.55	20
9th	Div.	1	-	Div.	-	-	Div.	-	-
10th	Div.	-	-	Div.	-	-	Div.	-	-
11th	Div.	-	-	3	0.3	50	Div.	-	-
12th	3	0.6	2000	2, 4	0.55	30	Div.	-	-

Table 4. Results of CCMS when members 1, 6, 7 are damaged 50% respectively

member mode	No. 1			No. 6			No. 7		
	case	ROS	iteration	case	ROS	iteration	case	ROS	iteration
1st	1.2 5	0.5 0.5	30 40	Div.	1	-	Div.	1	-
2nd	Div.	-	-	Div.	-	-	1.3	0.6	20
3rd	Div.	-	-	Div.	-	-	1	0.7	100
4th	Div.	-	-	Div.	-	-	Div.	-	-
5th	Div.	-	-	Div.	-	-	Div.	-	-
6th	Div.	-	-	Div.	-	-	Div.	-	-
7th	Div.	-	-	Div.	-	-	Div.	-	-
8th	Div.	-	-	Div.	-	-	Div.	-	-
9th	Div.	-	-	Div.	-	-	Div.	-	-
10th	4	0.85	20	Div.	-	-	Div.	-	-
11th	Div.	-	-	Div.	-	-	Div.	-	-
12th	Div.	-	-	Div.	-	-	4.6	0.75	50

한 지표는 부재 6 손상의 경우 case 2에 대해서 수렴하고 다른 경우는 모든 case에 대해 수렴하며 수렴이 빠르고 정확하며 반복 계산 횟수도 적다.

4.2 복수 부재 손상의 경우

복수 부재의 손상에 대해서는 부재 1·7, 2·6, 1·3·15가 50% 손상되었을 경우에 대해 고려하였다. Table 5, 6, 7은 각 손상지표에 따른 결과를 나타내며, 각 Table에 표시된 강성비는 Table 1의 case에 대해 나타내었다.

Table 5. Results of damage measures when members 1·7, 1·6, 13·15 are damaged 50% respectively

Member		No.1&7		No.2&6		No.13&15	
Damage measure							
CNF	case	1, 2, 3	2	3	2, 3		
	ratio of stiffness	0.7, 0.7	0.6	0.5	0.75, 0.7		
	iteration	70	750	150	200		
CNF+ CMS	case	1, 2, 3	1	2	1, 2, 3		
	ratio of stiffness	0.5	0.5	0.5	0.5, 0.5		
	iteration	150	3000	300	1000		

CNF는 복수 부재 손상 역시 대칭되는 부재에 대해서 같은 강성비로 수렴한다. CMS는 저차 모드에서 특히, 1차 모드에서 수렴결과가 좋다. CCMS의 경우 수렴결과가 좋지는 않지만 수렴하는 경우에 대해서는 수렴이 안정적이고 속도가 빠르다. CNF와 CMS를 조합한 지표에 대해서는 모든 손상의 경우에 대해 수렴결과가 좋다.

단일 부재와 복수 부재 손상의 경우 모두 손상 부재 강성비가 정확한 값에 수렴하지 않는 경우 손상되지 않은 부재의 강성비가 0.8~1.2 정도로 된다.

V. 결론

Table 6. Results of CMS when members 1·7, 2·6, 13·15 are damaged 50% respectively

member mode	No. 1 & 7			No. 2 & 6			No. 13 & 15		
	case	ROS	iteration	case	ROS	iteration	case	ROS	iteration
1st	2	0.5, 0.75	500	1,2,3	0.5, 1	50	2	0.6, 0.6	1000
	3	0.5, 0.5	200	4	0.7, 1	200	3	0.55, 0.6	700
	4	0.5, 0.6	700				4	0.9, 0.55	50
2nd	Div.	-	-	Div.	-	-	Div.	-	-
3rd	2	0.85, 0.7	100						
	3	0.5, 0.6	300	Div.	-	-	Div.	-	-
4th				1	0.5, 0.7	50			
				2	0.45, 1	50	Div.	-	-
				3	0.5, 1	250			
5th	Div.	-	-	Div.	-	-	Div.	-	-
6th	Div.	-	-	Div.	-	-	Div.	-	-
7th	Div.	-	-	Div.	-	-	4	0.8, 0.2	100
8th	Div.	-	-	3	0.5, 0.5	100	Div.	-	-
9th	Div.	-	-	2	0.5, 0.5	100	Div.	-	-
10th	Div.	-	-	Div.	-	-	Div.	-	-
11th	4	1.5, 0.4	300	Div.	-	-	Div.	-	-
12th	Div.	-	-	2, 4	0.6, 0.8	30	4	0.75, 0.9	200

본 논문에서는 확장 칼만 필터를 이용한 트러스 구조물의 손상추정에서 4가지 손상지표를 제시하고 유효성과 수렴성에 대해 연구하였다. 손상지표는 순해석을 통한 결과를 이용하였고, 부재 손상도는 부재 강성의 저하로 나타내었다. 본 논문에서 수치예제를 통한 4가지 손상지표에서 얻은 결과는 다음과 같다.

(1) CNF는 손상부재와 이 부재의 대칭부재 역시 같

Table 7. Results of CCMS when members 1·7, 2·6, 13·15 are damaged 50% respectively

member mode	No. 1 & 7			No. 2 & 6			No. 13 & 15		
	case	ROS	iteration	case	ROS	iteration	case	ROS	iteration
1st	2	0.5, 1	30	Div.	-	-	1.3	0.5, 1.5	50
	5	1, 0.4	30				2	0.7, 1	300
2nd	Div.	-	-	Div.	-	-	Div.	-	-
3rd	1	0.7, 0.7	100	Div.	-	-	1.2	1.1, 0.4	20
	2	0.8, 1	50						
4th	Div.	-	-	Div.	-	-	Div.	-	-
5th	Div.	-	-	Div.	-	-	Div.	-	-
6th	Div.	-	-	Div.	-	-	Div.	-	-
7th	Div.	-	-	Div.	-	-	Div.	-	-
8th	Div.	-	-	Div.	-	-	Div.	-	-
9th	Div.	-	-	4	0.6, 0.65	50	Div.	-	-
10th	4	0.5, 1	100	Div.	-	-	Div.	-	-
11th	Div.	-	-	Div.	-	-	Div.	-	-
12th	1.45	0.75	100	1	0.75, 1	100	4	1.0, 7	100

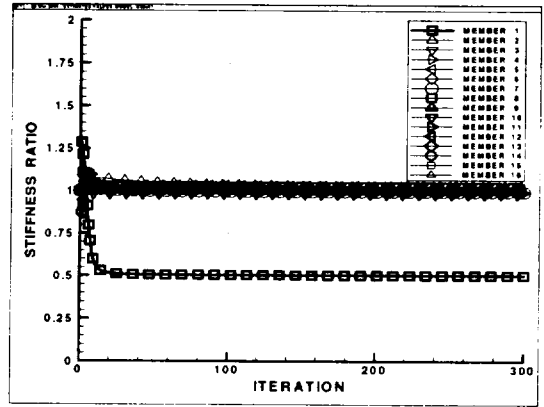
은 강성비로 수렴한다.

(2) CMS는 특히 저차 모드에서 수렴결과가 좋다. CMS가 다른 지표보다 수렴결과가 좋으나 반복 계산 횟수가 많다. CCMS는 CMS에 비해 수렴결과가 좋지 않지만 수렴하는 경우 발산폭이 크지않고 수렴속도가 빠르다.

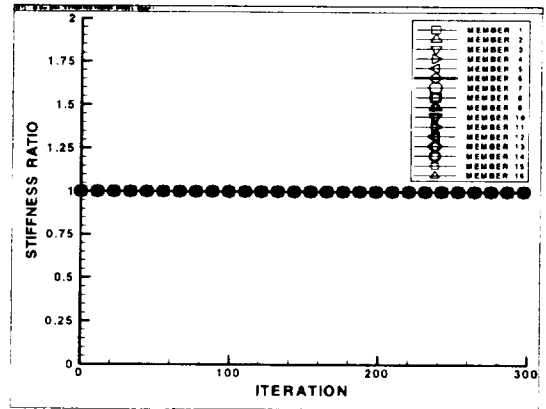
(3) CNF와 CMS를 조합한 지표는 대부분의 경우에서 거의 정확한 강성비로 수렴하였고, 수렴속도도 빠르다.

(4) 모든 지표는 데이터의 갯수가 많은 경우에 대해 좋은 수렴결과를 보였다.

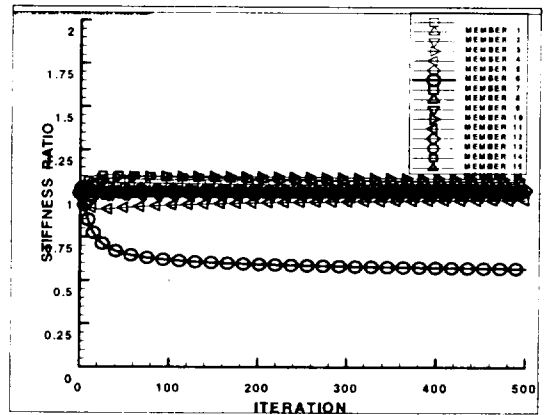
이상의 내용은 Fig. 1의 2차원 트러스에 대한 결과이나 본 논문에서 제시한 방법과 손상지표는 2, 3 차원의 다양한 구조시스템에 대해 적용가능하며 앞으로 그 유효성을 밝혀 나갈 예정이다.



(a) Damage of member 1

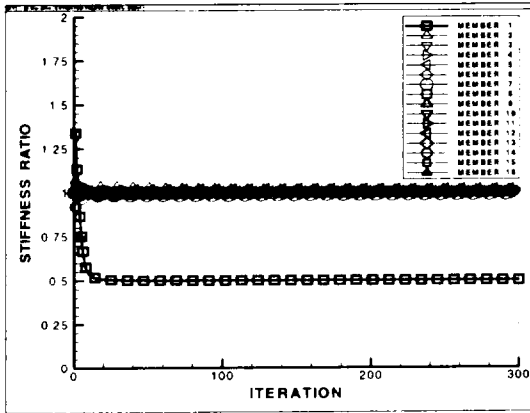


(b) Damage of member 6

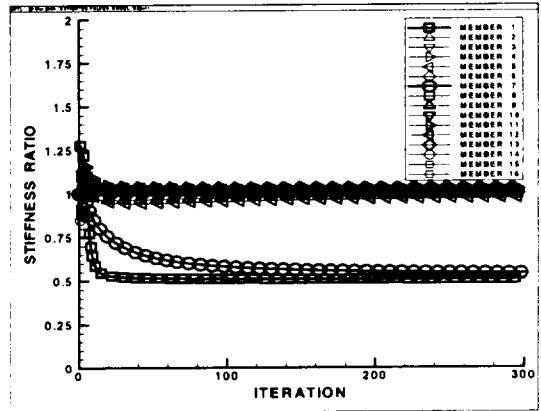


(c) Damage of member 7

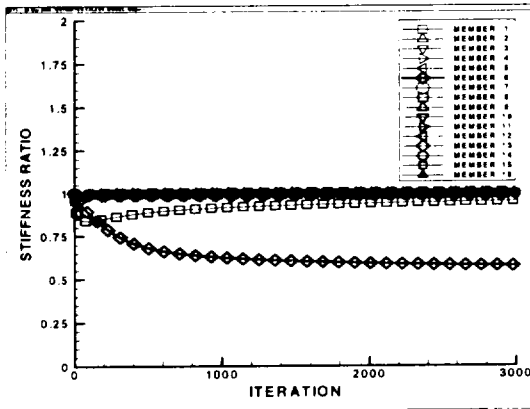
Fig. 2 Results of Case 3 with 1st mode in case of CMS



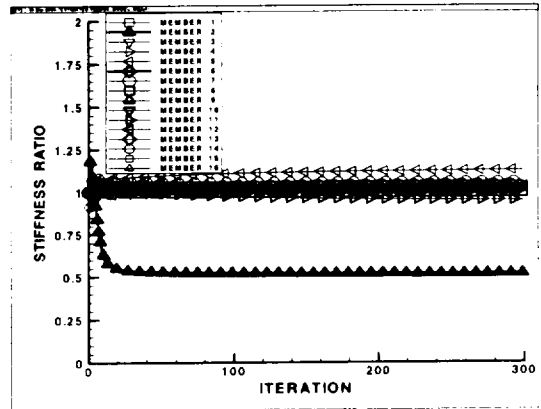
(a) Damage of member 1



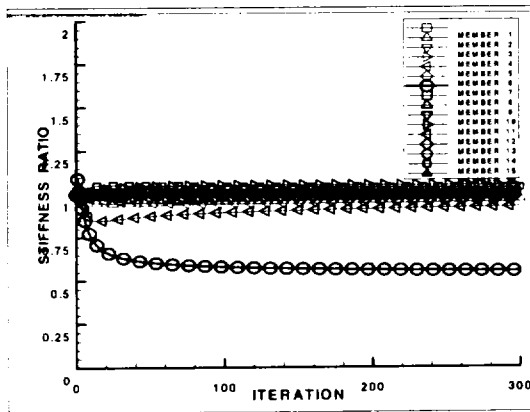
(a) Damage of members 1 and 7



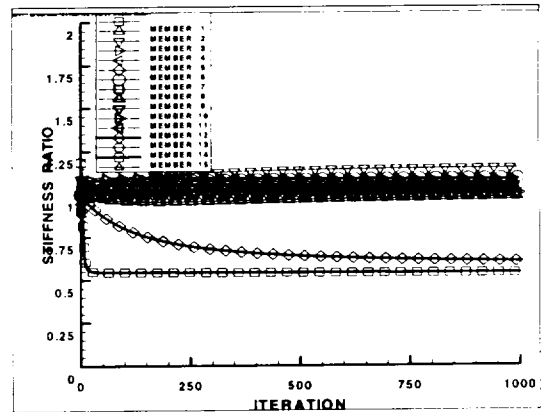
(b) Damage of member 6



(b) Damage of members 2 and 6



(c) Damage of member 7



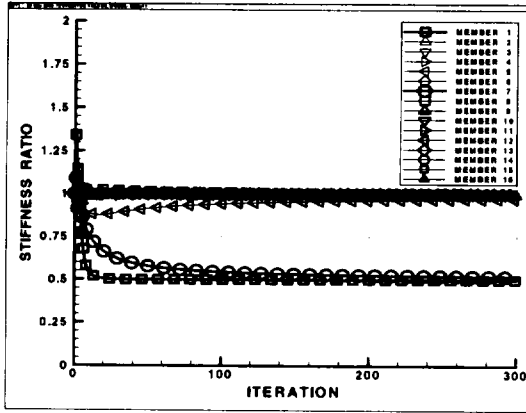
(c) Damage of members 12 and 15

Fig. 3 Results of Case 2 in case of combination of CNF and CMS

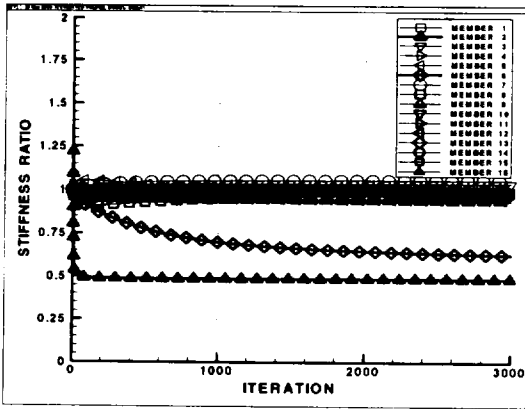
Fig. 4 Results of Case 3 with 1st mode in case of CMS

참고문헌

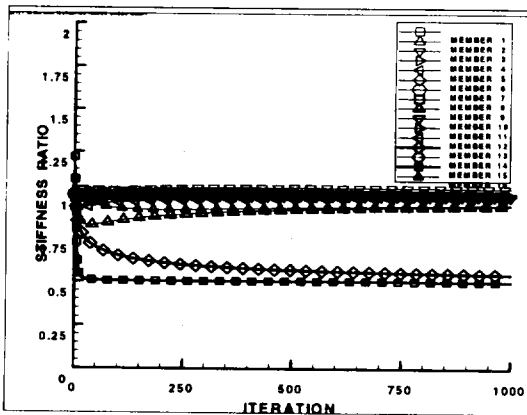
- 1) 서일교, 1999, 확장 칼만 필터를 이용한 2차원 트러스 구조물의 손상 추정, 대한건축학회 논문집, 제 15권 4호, pp3-12.
- 2) Papadopoulos, L., Garcia, E., 1998, Structural Damage Identification : A Probabilistic Approach, *AIAA JOURNAL*, Vol. 36, No.11.
- 3) Abdalla, M., Grigoriadis, K., Zimmerman, D., 1998, Enhanced Structural Damage Detection using Alternating Projection Methods, *AIAA JOURNAL*, Vol. 36, No.7.
- 4) Liu, P.L., Identification and Damage Detection of Trusses using Modal Data, *Journal of Structural Engineering*, pp.599-608
- 5) Hjela, P. and Soerio, F. J., 1990, Structural Damage Detection Based on Static and Modal Analysis, *AIAA JOURNAL*, Vol. 28, No.6.
- 6) 片山 徹, 1983, 應用カルマンフィルタ, 朝倉書店.
- 7) 西山 清, 1994, パソコンで解くカルマンフィルタ, 丸善株式会社.
- 8) 濱本卓司, 田野畑月人, 1996, 多層建築物の損傷層特定のために4つの損傷指標の有効性と限界, 構造工学論文集, Vol. 42B, pp.321-326.



(a) Damage of members 1 and 7



(b) Damage of members 2 and 6



(c) Damage of members 13 and 15

Fig. 5 Results of Case 2 in acse of combination of CNF and CMS