

有限要素法에 의한 潮汐流의 數値解析

金南亨*, 楊城基*

The Numerical Analysis of the Tidal Current Problem by Using Finite Element Method

Nam-Hyeong Kim, Sung-Kee Yang**

Summary

In this paper, a numerical model of the tidal current problem by using finite element method is described. Assuming that the tidal current is periodic motion, the Galerkin approach with linear triangular elements is employed as the numerical integration procedure in space. Also, shallow water theory neglecting the bottom friction, wind force and Coriolis force is employed. In order to stabilize the computing procedure, two-step explicit method, so-called the Kawahara scheme, is applied for the discretization of time. By the computation of numerical examples, it is shown that the present finite element method is suitable, and good results are attained.

序 論

조석은 천체운동에 의해 유기되는 주기적인 운동이다. 그러나, 조석이 천해역으로 밀려옴에 따라 관성과 해수표면의 조건에 의한 영향, 해저면의 마찰력, Coriolis의 힘(편향력) 등, 2차원적으로 작용하는 외력에 의해 매우 복잡한 흐름을 나타낸다. 천해역에 있어서 해수의 유동을 파악하는 것은, 공학상 매우 중요한 문제이다. 여기서는, 조석류의 수치해석의 제1보로서, 2차원적으로 작용하는 외력은 무시하고, 관성에 의한 비선형성만을 고려한 조석방정식을 이

용하여 유한요소법에 의한 조석류의 해석을 시도해보았다.

종래, 조석류의 해석에는 유한차분법이 넓게 이용되어져 왔다(Robert and Weiss, 1967; Vliegthart, 1964.; Flather and Heaps, 1975; Stelling, 1984). 유한차분법은, 미분을 차분으로 변환시킨 방법으로, 규칙적으로 배치된 격자점을 설정하여 해석하는 방법이다. 일반적으로 연안의 형상은 불규칙한 지형을 대상으로 하기 때문에 경제영역이 매우 복잡하다. 따라서, 유한차분법으로 해석하는 경우는, 해석해야 하는 영역이 다룰때 마다 프로그램 고쳐야 하는 불합리한 점이 생긴다. 한편, 유

* 海洋科學大學 海洋土木工學科 (Dept. of Ocean Civil Engineering, Cheju Univ., Cheju-do, 690-756, Korea)

한요소법(Kawahara and Hasegawa, 1978 ; Kawahara et al., 1982)은 중량잔차물 0으로 하는 방법으로서, 임의 형상인 해석영역을 고려할 수 있고, 경제조건도 보다많은 조건을 다룰 수 있는 해석 방법이다. 더우기, 유한요소법에 의한 해석의 경우, 영역이 다른 경우라도, 입력 데이터만 고치면 쉽게 해석할 수 있기 때문에 복잡한 연안을 가진 조석류의 해석으로서, 유한요소법에 의한 해석이 유리하다고 생각할 수 있다.

본 연구에서는, 천해역에서 조석방정식(金, 1993)을 유한요소법으로 해석하였고, 해석수법으로는 시간방향에 대해서 Two-step explicit method을 이용하였으며, 공간방향에 대해서는 Galerkin method로 이산화하였다. 본 해석방법의 타당성과 유효성을 확인하기 위하여, 임의로 상정한 프라스크 형단(灣)과 장방형수로를 수치해석하였다.

基礎方程式

비압축성 3차원 유체의 천해역에서 조석방정식을 유도해 보자. Fig.1에서와 같이 X축과 Y축을 정수면에서 수평 직각방향으로 잡고, Z축을 연직 방향으로 잡는다. 이때, 평균 수심을 나타내는 것으로써 $h(x, y)$, 정수면으로부터 측정된 조위를 $\zeta(x, y, t)$ 로 나타

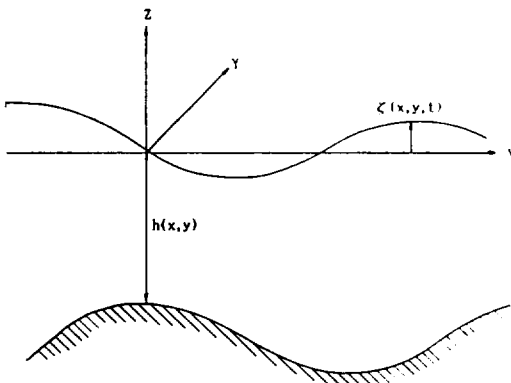


Fig. 1. Vertical cross section of the sea.
낸다.

운동방정식은

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial P}{\partial x} = \rho \cdot f_x \dots (1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial P}{\partial y} = \rho \cdot f_y \dots (2)$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial P}{\partial z} = \rho \cdot f_z \dots (3)$$

로 나타낸다. 여기서, u, v, w 는 각각 x, y, z 방향의 유속이고, P, ρ 는 각각 압력과 밀도이다. 또 f_x, f_y, f_z 는 x, y, z 방향의 외력이고, 점성이 없는 해수의 흐름에 대한 외력은 z 방향으로 중력가속도 g 만 작용한다. 따라서, $f_x=f_y=0, f_z=-g$ 이다. 연속방정식은 비압축성의 가정으로부터

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \dots (4)$$

이다. 일반적으로 장파를 고려하는 경우, 수심에 비하여 파장이 매우 크기 때문에, 연직방향의 운동은 수평방향의 운동에 비해서 무시할 수 있을 정도로 작다. 이와같은 가정 아래서, 식(3)은 다음과 같이 된다.

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho \cdot g \dots (5)$$

또, 기압의 변화를 고려하지 않으면, 식(5)는 해저면으로부터 수면까지 적분하는 것에 의해,

$$p = \rho \cdot g(\zeta - z) \dots (6)$$

로 나타낸다. 식(6)은 천해 장파의 경우는, 수압으로서 정수압 분포가 가정되어 있는 것을 나타낸다. 식(6)의 관계를 이용하면, x 와 y 방향의 압력 구배는,

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \rho \cdot g \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y} = \rho \cdot g \frac{\partial \zeta}{\partial y} \dots (7)$$

로 된다. 유속에 관해서는 수심 방향으로 평균한 평균 유속 u, v 를 다음과 같이 정의한다.

$$u = \frac{1}{H} \int_{-h}^{\zeta} u \, dz \dots (8)$$

$$v = \frac{1}{H} \int_{-h}^{\zeta} v \, dz \dots (8)$$

여기서 $H=h+\zeta$ 이다. 운동방정식을 해지면으로부터 수면까지 평균하여, 식 (8), (9)의 관계를 이용하면 다음 식이 얻어진다.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + g \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots (11)$$

똑같이 연속의 방정식에 관해서도, 해지면부터 수면까지 적분하면,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

경계조건으로써, 유속 또는 조위가 주어지는 경계를 생각한다.

$$u = \hat{u}, \quad v = \hat{v}, \quad \zeta = \hat{\zeta} \quad \dots\dots\dots (13)$$

여기서, $\hat{\quad}$ 는 주어진 일정한 값을 의미한다. 한편, 연안에 있어서의 지형은 불규칙하고 반드시 X축 혹은 Y축과 일치하지 않는다. 따라서, 연안으로 향하는 법선방향의 유속을 0으로 한다. 단, 흐름이 없다고 생각되는 지점에서는 u, v 모두 0로 한다.

有限要素解析

조석방정식 (10), (11), (12)를 시간에 대하여 이산화 하기전에 공간방향으로 유한요소법을 적용한다. 또, 조석방정식 (10), (11), (12)는 비선형항이 포함되어 있기 때문에, 유한요소의 해를 얻기 위하여 Galerkin method를 적용한다. Galerkin method는 가중잔차함수(weighted residual function)를 미지수의 형상함수와 똑같이 취한다. 이 중량잔차함수는 경계위에서는 임의의 값을 취한다. 여기서는 중량잔차함수 u^* , v^* , ζ^* 를 각각 식 (10), (11), (12)에 곱하여 해석영역 Ω 에 대하여 적분하면, 다음의 방정식이 주어진다.

$$\int_{\Omega} u^* \frac{\partial u}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} u^* u \frac{\partial u}{\partial x} d\Omega + \int_{\Omega} u^* v \frac{\partial u}{\partial y} d\Omega + g \int_{\Omega} u^* \frac{\partial \zeta}{\partial x} d\Omega = 0 \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$\int_{\Omega} v^* \frac{\partial u}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} v^* u \frac{\partial v}{\partial x} d\Omega + \int_{\Omega} v^* v \frac{\partial v}{\partial y} d\Omega + g \int_{\Omega} v^* \frac{\partial \zeta}{\partial y} d\Omega = 0 \quad \dots\dots (15)$$

$$\int_{\Omega} \zeta^* \frac{\partial \zeta}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \zeta^* u \frac{\partial H}{\partial x} d\Omega + \int_{\Omega} \zeta^* v \frac{\partial H}{\partial y} d\Omega = 0 \quad \dots\dots\dots (16)$$

유한 요소법에서는 윗식을 이산화 할때에, 해석 영역의 형상으로서 여러가지 형상이 고려되지만, 여기서는, 일반적으로 잘 이용되어지고 있는 삼각형 요소를 이용한다. 유한요소내의 임의의 위치에 대한 미지의 유속 u, v와 미지의 조위 ζ 의 값은 삼각형의 정점의 값을 이용해서 다음과 같이 1차식으로 근사된다.

$$\begin{aligned} u &= \sum_{\alpha=1}^3 \phi_{\alpha} u_{\alpha}, \quad u^* = \sum_{\alpha=1}^3 \phi_{\alpha} u_{\alpha}^* \\ v &= \sum_{\alpha=1}^3 \phi_{\alpha} v_{\alpha}, \quad v^* = \sum_{\alpha=1}^3 \phi_{\alpha} v_{\alpha}^* \\ \zeta &= \sum_{\alpha=1}^3 \phi_{\alpha} \zeta_{\alpha}, \quad \zeta^* = \sum_{\alpha=1}^3 \phi_{\alpha} \zeta_{\alpha}^* \end{aligned} \quad (17)$$

여기서 ϕ 는 유속 및 조위의 분포 상황을 각 요소내에서 근사하는 보간함수(interpolation function)이고, 보간함수의 형상은,

$$\phi_{\alpha} = \frac{1}{2\Delta^e} (a_{\alpha} + b_{\alpha}x + c_{\alpha}y) \quad (\alpha=1, 2, 3) \quad \dots\dots (18)$$

여기서 Δ^e 는 삼각형의 면적이고, 계수 a_{α} , b_{α} , c_{α} 는 각각 절점의 좌표를 이용하여 다음과 같이 나타낸다.

$$\begin{aligned} a_{\alpha} &= x_{\beta}y_r - x_r y_{\beta} \\ b_{\alpha} &= y_{\beta} - y_r \\ c_{\alpha} &= x_{\beta} - x_r \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{l} \alpha=1, \beta=3, r=3 \\ \alpha=2, \beta=3, r=1 \\ \alpha=3, \beta=1, r=1 \end{array} \right) \quad \dots\dots (19)$$

식 (14), (15), (16)에 식 (17)을 대입하고, u_{α}^* , v_{α}^* , ζ_{α}^* ($\alpha=1, 2, 3$)가 임의의 값인 것을 고려하면, 다음과 같은 요소 방정식이 얻어진다.

$$\sum_{\beta=1}^3 M_{\alpha\beta} \hat{u}_{\beta} + \sum_{\beta,r=1}^3 X_{\alpha\beta r} u_{\beta} u_r +$$

$$\sum_{\beta=1}^3 Y_{\alpha\beta r} v_{\beta} u_r + \sum_{\beta=1}^3 A_{\alpha\beta} \zeta_{\beta} = 0 \quad \dots\dots\dots (20)$$

$$\sum_{\beta=1}^3 M_{\alpha\beta} \dot{v}_{\beta} + \sum_{\beta, r=1}^3 X_{\alpha\beta r} u_{\beta} v_r + \sum_{\beta, r=1}^3 Y_{\alpha\beta r} v_{\beta} v_r + \sum_{\beta=1}^3 B_{\alpha\beta} \zeta_{\beta} = 0 \quad \dots\dots\dots (21)$$

$$\sum_{\beta=1}^3 M_{\alpha\beta} \dot{\zeta}_{\beta} + \sum_{\beta, r=1}^3 X_{\alpha\beta r} \zeta_{\beta} H_r + \sum_{\beta, r=1}^3 Y_{\alpha\beta r} v_{\beta} H_r = 0 \quad \dots\dots\dots (22)$$

(α=1, 2, 3)

여기서 $\dot{u} = \frac{du_{\beta}}{dt}$, $\dot{v} = \frac{dv_{\beta}}{dt}$, $\dot{\zeta} = \frac{d\zeta_{\beta}}{dt}$ 이고, 식 (20), (21), (22)에 나타낸 계수는 다음과 같다.

$$\left. \begin{aligned} M_{\alpha\beta} &= \int_{\Omega} \phi_{\alpha} \phi_{\beta} d\Omega = \frac{\Delta^e}{12} (1 + \delta_{\alpha\beta}) \\ A_{\alpha\beta} &= g \int_{\Omega} \phi_{\alpha} \frac{\partial \phi_{\beta}}{\partial x} d\Omega = \frac{b_{\beta}}{6} \\ X_{\alpha\beta r} &= \int_{\Omega} \phi_{\alpha} \phi_{\beta} \frac{\partial \phi_r}{\partial x} d\Omega = \frac{b_r}{24} (1 + \delta_{\alpha\beta}) \\ A_{\alpha\beta} &= g \int_{\Omega} \phi_{\alpha} \frac{\partial \phi_{\beta}}{\partial y} d\Omega = \frac{c_{\beta}}{6} \\ Y_{\alpha\beta r} &= \int_{\Omega} \phi_{\alpha} \phi_{\beta} \frac{\partial \phi_r}{\partial x} d\Omega = \frac{c_r}{24} (1 + \delta_{\alpha\beta}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

여기서 $\delta_{\alpha\beta}$ 는 Kronecker의 Delta이며, $\alpha = \beta$ 일때는 1이고, $\alpha \neq \beta$ 일때는 0의 값을 갖는다. 식 (20), (21), (22)을 모든 요소에 관하여 더하면, 다음과 같은 전체 방정식이 얻어진다.

$$[M] \{\dot{u}\} + [Xu] \{u\} + [Yu] \{v\} + [A] \{\zeta\} = 0 \quad \dots (24)$$

$$[M] \{\dot{v}\} + [Xv] \{u\} + [Yv] \{v\} + [B] \{\zeta\} = 0 \quad \dots (25)$$

$$[M] \{\dot{\zeta}\} + [XH] \{u\} + [YH] \{v\} = 0 \quad \dots\dots\dots (26)$$

또, 식 (24), (25), (26)은 다음과 같이 간단하게 나타낼 수 있다.

$$[M] \{\dot{K}\} + [H] \{K\} = 0 \quad \dots\dots\dots (27)$$

여기서,

$$[M] = \begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & M \end{pmatrix}, \quad \{\dot{K}\} = \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{\zeta} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (28)$$

$$[H] = \begin{pmatrix} Xu & Yu & A \\ Xv & Yv & B \\ XH & YH & 0 \end{pmatrix}, \quad [K] = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \zeta \end{Bmatrix}$$

이다. [K]는 전절점에 대한 유속과 조위를 나타내는 벡터이고, [M], [H]는 각각 유한요소에 있어서 계산된 계수를 조합한 것에 의해 얻어진 행렬이다. 전체 방정식 (27)는 시간에 관한 미분을 포함하고 있다. 여기서, 시간 미분을 포함하는 항은 2단계 양적스킴 (two-step explicit scheme)을 이용하여 이산화한다. 시간 스텝 n과 n+1의 사이에 n+1/2의 중간단계의 스텝을 설정하는 것에 의해, 다음과 같이 주어진다.

$$K^{n+1/2} = K^n + \frac{\Delta t}{2} \frac{dK^n}{dt} \quad \dots\dots\dots (29)$$

$$K^{n+1} = K^n + \Delta t \frac{dK^{n+1/2}}{dt} \quad \dots\dots\dots (30)$$

식 (27)에 two-step explicit scheme의 식 (29), (30)을 대입하면, 아래와 같은 관계가 얻어진다.

$$[M] \{K^{n+1/2}\} = [\tilde{M}] \{K^n\} - \frac{\Delta t}{2} [H] \{K^n\} \quad \dots\dots (31)$$

$$[M] \{K^{n+1}\} = [\tilde{M}] \{K^n\} - \frac{\Delta t}{2} [H] \{K^{n+1/2}\} \quad \dots\dots (32)$$

윗식의 좌변의 행렬 [M]의 역행렬을 계산해야 하기 때문에, 식 (31), (32)는 완전한 양적 해석법이 아니다. 따라서, 좌변의 계수행렬을 집중화하면, 다음의 algorithm이 얻어진다.

$$[\tilde{M}] \{K^{n+1/2}\} = [\tilde{M}] \{K^n\} - \frac{\Delta t}{2} [H] \{K^n\} \quad \dots\dots\dots (33)$$

$$[\tilde{M}] \{K^{n+1}\} = [\tilde{M}] \{K^n\} - \Delta t [H] \{K^{n+1/2}\} \quad \dots\dots\dots (34)$$

여기서 [M]은 집중행렬이고, 다음과 같다.

$$[\tilde{M}] = \begin{pmatrix} \bar{m} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{m} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{m} \end{pmatrix}, \quad \bar{m} = \frac{\Delta^e}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[\tilde{M}] = e[\bar{M}] + (1-e)[M]$$

여기서 e는 선택계수로 불리며, 일반적으로 0.7~0.95의 범위를 취한다. 식 (33), (34)를 전체의 영역에서 경계조건을 주어 계산을 하면, 각 절점에서 유속

과 조위를 구할 수가 있다. 본 계산에서 e 를 0으로 하였다.

數值計算結果 및 考察

식 (33), (34)를 이용하여, 임의로 상정한 프라스크 만(灣)과 장방형수로를 수치해석하였다. 첫번째 예로서, Fig. 2은 해석영역을 임의로 상정한 프라스크

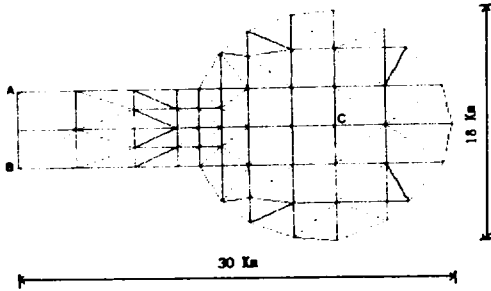


Fig. 2. Finite element mesh of idealized bay.

만의 삼각형의 요소분할을 나타낸 것이며, 총절점수는 61절점, 총요소수는 94요소로 했다. 수치해석의 초기조건으로서, 해석영역내의 모든 절점에 있어서 평균수심은 10.0m이고, 유속은 0으로 가정하며, 해면은 조위의 변동이 전혀없는 정수면으로 가정했다. 한편, 경계조건으로서는 연안경계에 대한 법선방향의 유속을 0으로 하고, 만입구(A-B)에서는 계산 step마다 해수면의 변위를 다음과 같이 주었다.

$$\zeta = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \Delta t\right) \dots\dots\dots (35)$$

여기서, A는 진폭으로 0.5m이고, T는 주기로 $T = 12 + 5/12$ (hr)으로 했다. 또한 Δt 는 증분시간으로 30sec로 했다. Fig. 3는 식 (35)에서 주어진 조위로 계산 했을때, 프라스크형만 내의 C점에서 조위와 유속의 변위를 계산한 것으로, 계산된 유속과 조위 사이에는 반주기의 위상의 차이가 있는것을 알 수 있다. 이것은 일반적으로 잘 알려진 유속과 조위와의 관계가 일치한다. Fig. 4는 임의의 만내로 흘러 들어가는 양상과 흘러나오는 양상을 저조(23hr)때와 고조(29hr)때의 유속분포를 나타낸 것이며, 흐름의 상태를 정성적으로 파악할 수 있겠다.

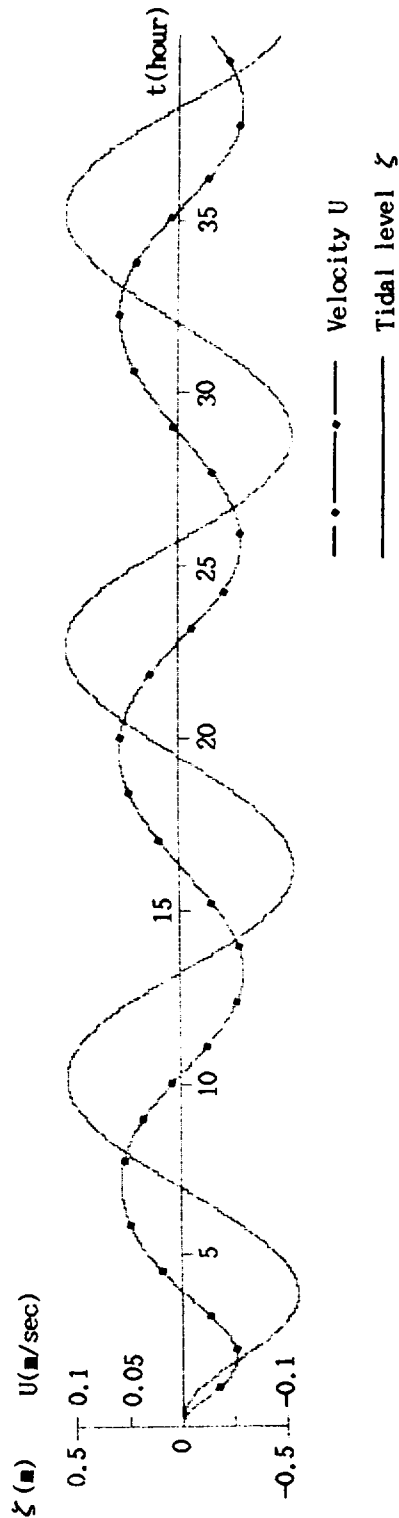


Fig. 3. Calculated velocity and tidal elevation at nodal point C.

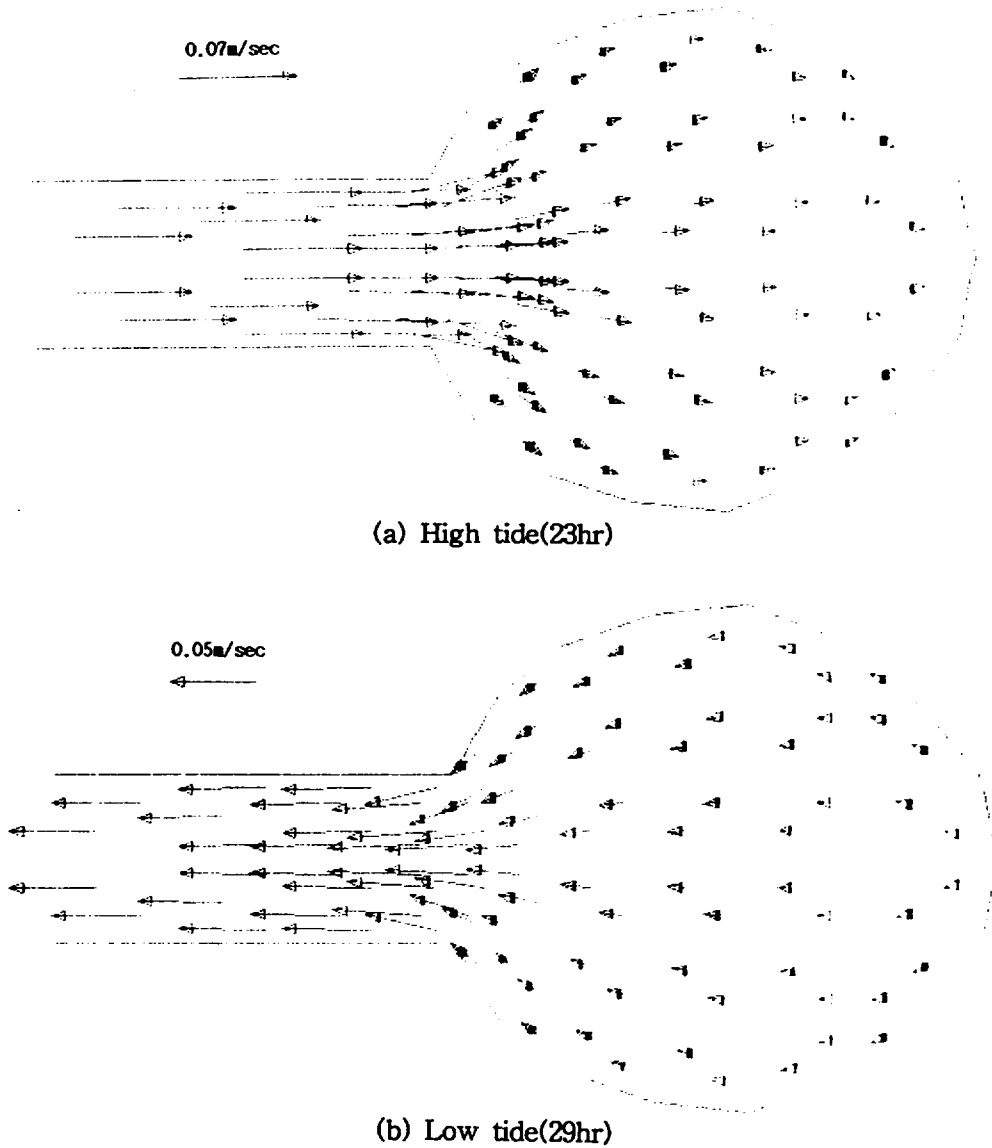


Fig. 4. Calculated tidal current velocity.

두번째의 예로서, Fig. 5는 장방형수로를 삼각형 요소로 분할한 것이며, 요소의 간격은 0.2m이며, 총절점수는 153절점, 총요소수는 200요소로 했다. 그리고, 장방형수로는 사면이 강체의 벽면으로 둘러싸여 있고, 저면은 마찰이 없는 수평면으로 길이를 10cm로 했으며, 측면으로 진행되는 법선의 유속은 0로 한다. 초기 조건으로서, Fig. 6과 같이 $t=0.0\text{sec}$ 일때, 입

구로부터 5m위치를 경계로 상류측 수심을 1.0m, 하류측 수심을 0.5m로 하며, 유속은 0으로 했다. 계산의 증분시간은 0.02sec로 했다. 또 Fig. 6은 $t=0.5\text{sec}$, $t=1.0\text{sec}$, $t=1.5\text{sec}$, $t=2.0\text{sec}$ 일때의 유한요소법의 계산결과를 나타내는 것으로, 파동의 전파양상을 잘 나타내고 있다.

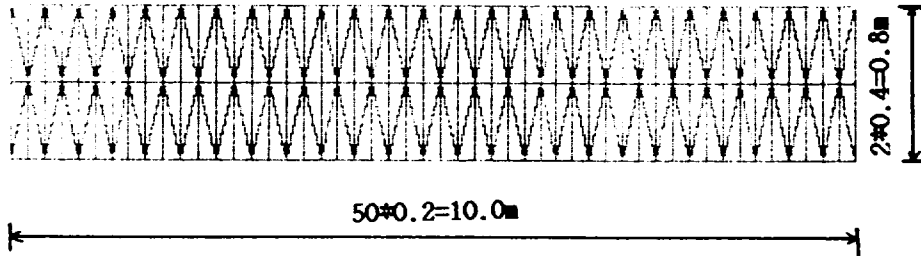


Fig. 5. Finite element mesh of rectangular wave tank.

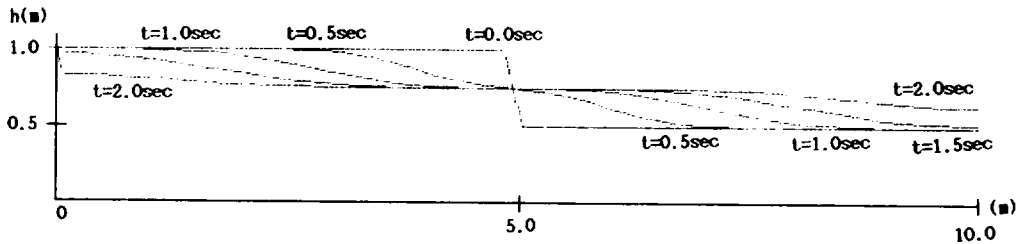


Fig. 6. Initial condition and propagation computation of bore.

摘 要

조석류 해석의 제1보로서, 유한요소법으로 천해역에서 조석방정식을 해석해 보았다. 본 계산의 결과는 실제의 결과와 잘 일치하는 것을 알 수 있으므로, 해

석방법의 타당성이 인정된다. 따라서, 복잡한 형태로 되어 있는 지형을 대상으로 하는 경우, 본 해석방법이 종래의 유한차분법보다 실용적이라 할 수 있겠다. 개발된 유한요소법의 수치모델을 현지에 적용할 경우는, 본 계산에서는 생략되었지만, 2차원적으로 작용하는 외력항을 고려할 필요가 있는 것으로 사료된다.

參 考 文 獻

Flather, R.A. and N.S. Heaps, 1975. Tidal Computations for Morecambe Bay, Geophy. J. R. Astro. Soc., Vol. 42, pp. 489-527.

Kawahara, M. and K. Hasegawa, 1978. Periodic Galerkin Finite element Method of Tidal Flow, Int. J. for Num. Meth. Eng., Vol. 12, pp. 115-127.

Kawahara, M., H. Hirano, K. Tsubota, and K. Inagaki, 1982. Selective Lumping finite element method for shallow water flow, Int. J. for num. Meth. in Fluids, Vol. 2, pp. 89-112.

Robert, K. V. and N.O. Weiss, 1967. Convective difference scheme, Math. Comput., Vol. 20, pp. 272-299.

Stelling, G.S., 1984. On the construction of computational methods for shallow water flow problems, Rijkswaterstatt communications, The Hague, 226P.

Vliementhart, A. C., 1964. Dissipative difference schemes for shallow water equation, Jour. Eng. Math., Vol. 3, No. 2, pp. 81-94.

金南亨譯(Kiyoshi Horikawa 著), 1993. 新編 海岸工學, 清文閣, 415P.