

Kalman filter 를 이용한 2차원 트러스 구조의 손상 검출

서 일 교*

Damage Detection of 2-Dimensional Truss Structures Using Kalman Filter

Ill-Gyo Suh*

ABSTRACT

This paper is concerned with the identification analysis of structural damage detection on the 2-dimensional truss structures based on free vibration equation and extended Kalman filter. The local damage is characterized in terms of the stiffness change ratios of damaged members. And the natural frequencies of damaged truss structure model were adopted as the observation data. The both location and stiffness of damaged parts of members in truss structures are estimated by the proposed inverse solution procedure. The applicability and effectiveness are shown with the numerical examples.

Key words : Inverse analysis, Identification, Extended Kalman filter, Truss structures

1. 서 론

최근 컴퓨터를 이용한 계산역학이 눈부시게 발전해 온 가운데 지금까지 주로 대상으로 해온 문제는 변형, 열, 유동이라는 역학적 장(field)에 어떤 원인이 주어졌을 때 장의 거동으로서의 결과를 얻는 것이다. 이와 같은 장의 해석을 순해석(Forward analysis)이라 한다.

한편 최근에는 어떤 장에 관해서 얻어진 정보를 기

본으로 그것이 생기게 한 장의 미지량을 추정하는 소위 역문제(Inverse problem)에 대한 관심이 높아졌다¹⁾⁻⁴⁾. 이러한 역문제는 다방면의 여러 분야에 존재하여서 장의 물성치의 동정문제(Identification), 열원율 외력으로 하는 소스의 추정문제(Estimation), 내부 결합형상 동정문제 등 열전도, 고체 및 유체역학분야 뿐만 아니라 의료분야의 X선 단층법 혹은 초음파 진단 등도 그 대표적인 것이다⁵⁾⁻⁶⁾.

이러한 역문제 중의 하나로서 기존 구조물의 손상도 추정문제를 들 수 있다. 최근 들어 기존 구조물의 내구년한을 합리적으로 예측할 필요성이 널리 인식되고 있으며 이에 따라 기존 구조물을 보수, 보강 혹은

* 제주대학교 건축공학과
Dept. of Architectural Eng., Cheju Nat'l Univ.

해체를 결정하기 위한 지원 시스템의 구축이 요구되고 있다. 따라서 정기적 혹은 지진 직후에 모니터링을 통하여 구조물의 손상부위와 손상도를 추정하는 것은 구조물의 내구년한을 예측하는 데 매우 중요하다. 그러나 손상부를 파악하고자 하는 경우 그 위치나 형태를 정확히 알아내는 것은 매우 어려운 일이다. 이러한 기존 구조물 내부의 손상부 추정 등을 수행하는 데 역문제해석은 매우 유용하며 최근 많은 관심을 끌고 있다⁷⁾⁻⁸⁾.

한편 역문제를 풀 때 필요한 보조 정보량은 일반적으로 random noise를 포함하고 있는 관측량(계측량)으로서 주어지는 경우가 많기 때문에 확률적으로 취급할 필요가 있다. 여기서 역문제를 확률 dynamic system 으로서 수리모델화하는 경우 추정, 동정기법으로서 시스템과 제어분야 뿐만이 아니라 많은 분야에서 응용되고 있는 Kalman filter 를 적용할 수 있다⁹⁾⁻¹²⁾.

따라서 본 연구는 구조물 내부의 손상부 추정을 수행하는 데 적용되는 역문제해석을 대상으로 Kalman filter 이론을 적용하여 보다 효율적이고 정밀한 해석이 가능한 역해석법을 개발하는 데 목적이 있다. 지금까지 Kalman filter 이론은 지반공학을 중심으로 탄성계수의 추정이나 탄성체내에 존재하는 미지 공동결함 추정에 적용되어 왔다¹³⁾⁻¹⁵⁾. 그러나 현재 트러스구조물의 부재손상 추정에 관한 연구에 Kalman Filter 를 적용한 연구보고는 없다. 따라서 본 연구에서는 Kalman filter를 적용하여 트러스 구조물의 부재 손상도를 추정할 수 있는 새로운 역해석법을 개발하고자 한다.

II. 확장 Kalman Filter 이론

먼저 비선형 확률시스템을 다음과 같은 상태방정식과 관측방정식으로 나타내는 것으로 한다¹⁰⁾.

$$\text{상태방정식} \\ z_{t+1} = \psi_t(z_t) + \gamma_t(z_t)\zeta_t \quad (1)$$

관측방정식

$$y_t = m_t(z_t) + \nu_t \quad t \geq 0 \quad (2)$$

여기서 z_t , y_t , ζ_t , ν_t 는 각각 상태벡터, 관측벡터, 시스템 잡음벡터 및 관측 잡음벡터이다. 또한 z_0 , ζ_t , ν_t 는 가우스 과정이고 다음을 만족한다.

$$\begin{aligned} E\{\zeta_t\} &= 0, \quad E\{\nu_t\} = 0, \\ E\{\zeta_t \zeta_t^T\} &= S_t \delta_{kk}, \quad E\{\nu_t \nu_t^T\} = Q_t \delta_{kk}, \\ E\{\nu_t \zeta_t^T\} &= E\{\zeta_t \nu_t\} = 0, \quad E\{z_0\} = \bar{z}_0, \\ E\{(z_0 - \bar{z}_0)(z_0 - \bar{z}_0)^T\} &= R_0 \delta_{kk} \\ E\{z_0 \zeta_t^T\} &= 0, \quad E\{z_0 \nu_t^T\} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 δ_{kk} 는 kronecker 델타이며 z_0 는 상태벡터 z_t 의 초기치벡터, S_t , Q_t , R_0 는 각각 시스템 잡음 공분산행렬, 관측잡음 공분산행렬 및 추정오차 공분산행렬을 나타낸다. 여기서 $\psi_t(z_t)$, $m_t(z_t)$ 는 비선형 벡터함수이며, 상태벡터 z_t 에 대해 연속미분 가능하다고 가정한다. 이 가정 하에서 z_t 의 추정량 $\hat{z}_{t+1/t}$ 의 주위에서 Taylor 전개하고 고차항을 무시하면 다음과 같이 선형화된 확률시스템이 얻어진다.

$$z_{t+1} = \Phi_t z_t + u_t + \Gamma_t \zeta_t \quad (4)$$

$$\eta_t = M_t z_t + \nu_t \quad (5)$$

여기서

$$u_t = \psi_t(\hat{z}_{t/t}) - \Phi_t \hat{z}_{t/t} \quad (6)$$

$$\eta_t = y_t - m_t(\hat{z}_{t/t-1}) + M_t \hat{z}_{t/t-1} \quad (7)$$

이상으로부터 비선형 시스템을 선형화함으로써 얻어진 식(4) 와 (5)로써 나타낸 시스템에 대한 확장 Kalman filter는 다음과 같다.

<필터방정식>

$$\hat{z}_{t/t} = \hat{z}_{t/t-1} + B_t \{y_t - m_t(\hat{z}_{t/t-1})\} \quad (8)$$

$$\hat{z}_{t+1/t} = \psi_t(\hat{z}_{t/t}) \quad (9)$$

<Kalman Gain>

$$B_t = \hat{R}_{t/t-1} M_t^T (M_t \hat{R}_{t/t-1} M_t^T + Q_t)^{-1} \quad (10)$$

<추정오차의 공분산 행렬방정식>

$$\hat{R}_{t/t} = \hat{R}_{t/t-1} - B_t M_t \hat{R}_{t/t-1} \quad (11)$$

$$\hat{R}_{t+1/t} = \Phi_t \hat{R}_{t/t} \Phi_t^T + \Gamma_t S_t \Gamma_t^T \quad (12)$$

<초기치>

$$\hat{z}_{0/-1} = \bar{z}_0 \quad (13)$$

$$\hat{R}_{0/-1} = R_0 \quad (14)$$

여기서 $\hat{z}_{k/k}$ 는 $\{y_0, y_1, \dots, y_k\}$ 에 의해 얻어지는 z_k 의 추정치 이고 $\hat{R}_{t/t}$ 는 $\hat{z}_{t/t}$ 의 추정오차 공분산행렬이다.

III. 트러스 구조물의 손상추정법

3.1. 상태방정식 및 관측방정식

본 논문에서는 트러스 구조물의 자유진동에 의해 얻어지는 고유진동수를 관측데이터로 하고, 구조물내의 각 부재의 손상을 강성의 저하로서 평가하여 트러스 구조물의 손상 추정문제의 역문제를 생각한다. n개의 부재로 구성되는 트러스 구조물의 각 부재의 강성 $\{K_1, K_2, \dots, K_n\}$ 을 미지의 상태벡터 z 로 하면 관측데이터인 고유진동수와 미지량인 강성의 관계는 비선형이기 때문에 시스템은 다음과 같이 모델화 할 수 있다.

$$y = m(z) + \nu \quad (15)$$

여기서 y 는 관측벡터로서 고유진동수를, ν 는 관측잡음 벡터를 나타낸다. 또한 상태량 즉 부재의 강성은 정수이어서 시간적으로 변화하지 않는 파라미터이기 때문에 시간적 遷移構造를 갖지 않게 된다. 따라서 시스템 잡음 ζ_t 는 고려할 필요가 없고, 따라서 시스

템의 상태방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$z_{t+1} = I z_t \quad (16)$$

여기서 하첨자 t 는 반복계산에서 각 스텝을 나타내며, I 는 단위행렬이다. 또 시스템의 관측방정식 (15)에서 $m(z)$ 는 z 에 관한 비선형 함수이며 구조물의 고유진동수를 나타낸다. 따라서 식(16)에서 주어진 각 스텝에서의 상태벡터로부터 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$y_t = m_t(z_t) + \nu \quad (17)$$

t : 필터링 횟수

또한 초기치 \bar{z}_0 , 추정오차 공분산매트릭스 R_0 는 일반적으로 모르기 때문에 초기치를 가정하여 계산한다. 따라서 얻어지는 추정치는 \bar{z}_0 와 R_0 에 의존하게 된다.

3.2. 감도행렬의 계산

선형화에 대응하는 감도행렬 M_t 는 다음과 같다.

$$M_t = \left(\frac{\partial m_t(z_t)}{\partial z_t} \right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial z_1}, & \frac{\partial y_1}{\partial z_2}, & \dots, & \frac{\partial y_1}{\partial z_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial z_1}, & \frac{\partial y_2}{\partial z_2}, & \dots, & \frac{\partial y_2}{\partial z_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial z_1}, & \frac{\partial y_m}{\partial z_2}, & \dots, & \frac{\partial y_m}{\partial z_n} \end{bmatrix} \quad t/t-1 \quad (18)$$

식(18)은 각 스텝의 z_t 에 의존하기 때문에 필터링 과정에서 반복 계산되어야 한다.

3.3. 확장 Kalman filter 를 이용한 해석 알고리즘

확장 Kalman filter를 비선형 역문제의 반복계산과정에 이용할 때의 해석순서는 다음과 같다.

- (1) 추정할 미지량의 초기치벡터 \bar{z}_0 와 추정오차 공분산 매트릭스 R_0 를 가정하여 초기 확률 분포를 설정한다.
- (2) 트러스 자유진동문제 해석에 필요한 데이터와

경계조건 등을 설정한다.

(3) 관측데이터 y 를 입력하고 거기에 포함되는 관측잡음에 관한 관측잡음 공분산매트릭스 Q 를 설정한다.

(4) 필터링과정에서 반복해서 갱신되는 추정치 $\hat{z}_{k/k-1}$ 을 이용하여 구조물의 고유 진동수 y_i 를 계산하고 또한 감도 매트릭스 M_i 를 계산한다.

(5) 미지량에 대해 Filter gain B_i 를 계산한다.

(6) 필터 방정식으로부터 갱신량 $\hat{z}_{t+1/t}$ 를 계산한다.

(7) 수렴판정을 하고, 수렴하지 않는 경우는 추정오차 공분산매트릭스 $R_{t+1/t}$ 를 갱신하여 스텝 (4)로 돌아간다.

이상의 계산을 수렴조건에 만족할 때까지 반복 계산한다.

IV. 수치해석예

트러스 구조물의 부재 손상도 추정을 위한 해석모델로서 Fig. 1 과 같이 5개의 절점과 6개의 부재로 구성된 2차원 트러스 구조물을 대상으로 한다. 이 트러스의 재원은 Table 1 과 같다. 여기서 A는 단면적, E는 영계수, ρ 는 밀도를 나타낸다. Table 2 는 해석모델의 각 부재가 50%의 손상을 입었을 때의 고유진동수와 손상을 입지 않았을 때의 고유진동수를 나타낸다.

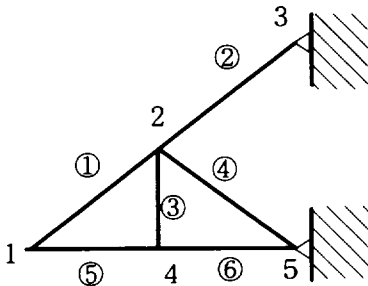


Fig. 1 2-D Truss model

Table 1 Constants of the model

A	100 cm ²
E	2.1 × 10 ⁹ kg/cm ²
ρ	0.00787 kg/cm ³

Table 2 Natural frequencies and observed data

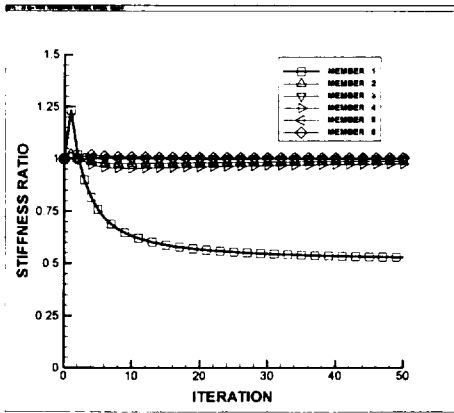
mem-ber mode	Un-damage	No. 1	No. 2	No. 3	No. 4	No. 5	No. 6
1st	48.456	47.075	24.953	48.229	44.307	48.456	48.260
2nd	65.807	65.807	65.807	65.807	65.807	61.188	48.456
3rd	85.167	79.729	83.578	84.242	67.340	85.167	85.167
4th	190.059	148.840	185.416	188.957	187.235	174.824	190.592
5th	229.888	229.888	229.888	229.888	229.888	190.592	221.658
6th	427.689	425.802	426.936	309.841	425.803	427.689	427.689

관측 데이터는 일반적으로 구조물의 진동을 모니터링해서 얻은 데이터를 사용해야 하나 본 논문에서는 순해석에 의한 고유진동수를 관측 데이터로 사용하였다.

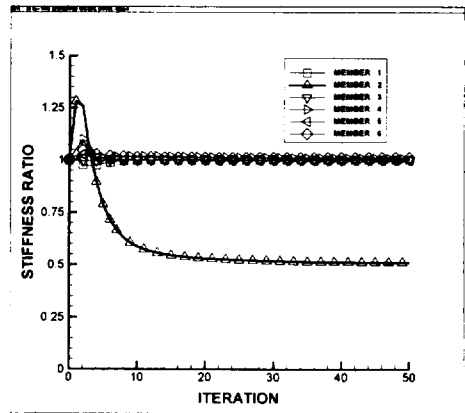
먼저 확률분포는 관측잡음으로서 관측데이터의 30%를 표준편차로 하는 분포로 가정하고 상태량의 초기치로서는 정상시의 강성으로 하였다. 또한 감도행렬 계산을 위한 초기치로서는 정상시의 30%의 손상을 가정하였다.

Fig. 2 는 1번에서 6번까지의 각 부재의 손상 추정결과를 나타낸 것이다. 여기서 가로축은 반복계산 횟수를 나타내고 세로축은 손상전의 강성에 대한 추정된 강성 비를 나타낸다. 여기서 부재 5의 경우를 제외한 나머지 부재에 대해서는 상태량이 안정되게 수렴하고 손상정도와 손상위치를 잘 추정해내고 있음을 알 수 있다. Fig. 2(e)의 경우는 부재 1과 부재 5가 동시에 손상된 것으로 추정되고 있다. 따라서 이 경우는 관측데이터로서 고유진동수만으로 정확한 추정에 무리가 있는 것을 알 수 있고, 추가로 고유모드도 동시에 평가할 필요가 있다.

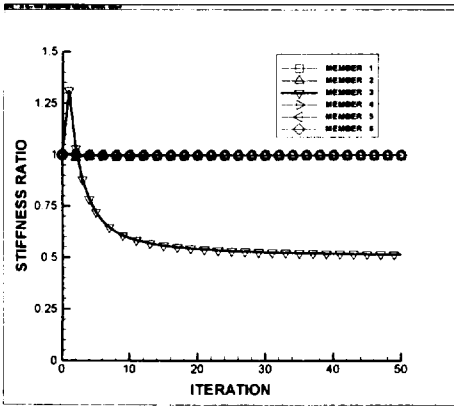
Fig. 3 은 복수개의 부재 손상 추정에 대한 결과로서 Fig. 3(a)는 2번과 3번의 2개 부재, Fig. 3(b)는 2번, 3번, 4번의 3개 부재가 동시에 각각 50%의 손상



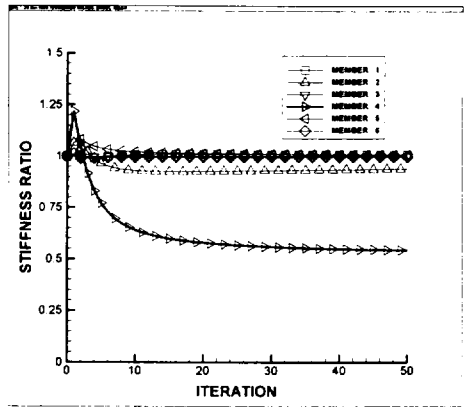
(a) Damage of member 1



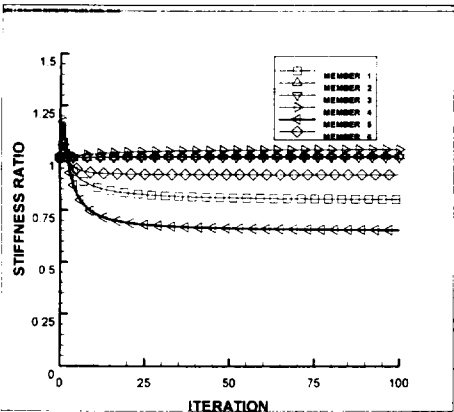
(b) Damage of member 2



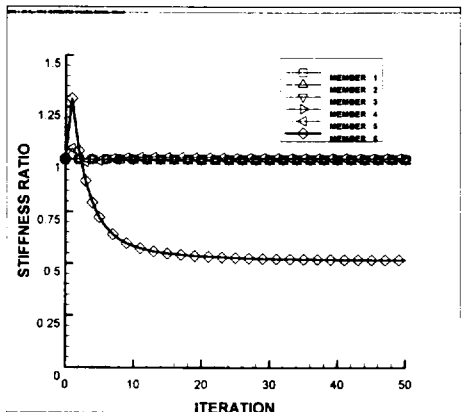
(c) Damage of member 3



(d) Damage of member 4



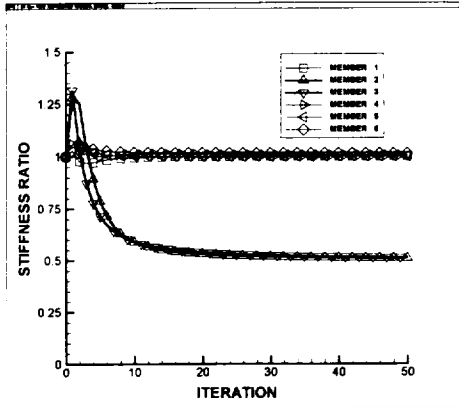
(e) Damage of member 5



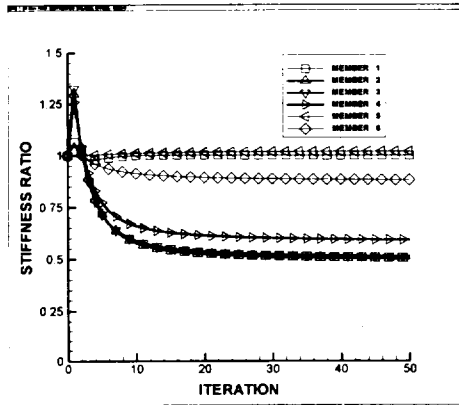
(f) Damage of member 6

Fig. 2 Identification of the damaged members and stiffness with 50% reduction

을 입었을 때의 추정결과인데 전부 상태량이 안정되게 수렴하여 복수개의 손상정도와 손상위치를 잘 추정하고 있다.



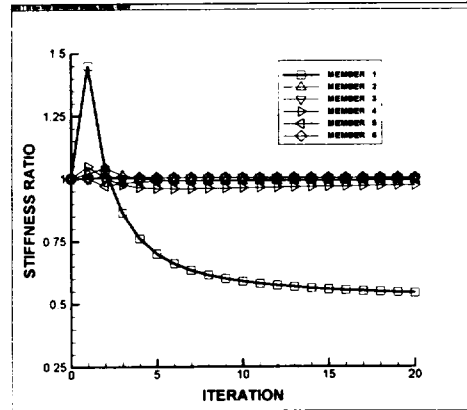
(a) Damage of members 2 and 3



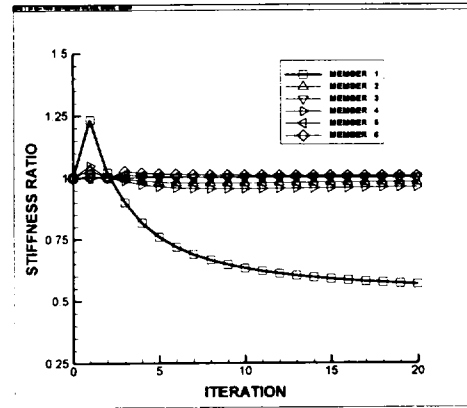
(b) Damage of members 2, 3 and 4

Fig. 3 Identification of two and three damaged members

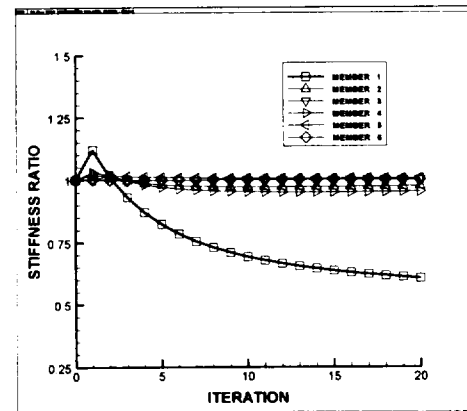
Fig. 4 는 관측잡음의 표준편차의 관측데이터에 대한 변화에 따른 해의 수렴성을 보인 것으로 부재 1의 50%손상에 대해서 관측잡음의 분포를 각각 관측데이터의 10%, 30%, 50%를 표준편차로 했을 때의 결과이다. 그림에서 알 수 있듯이 표준편차가 커짐에 따라 수렴이 늦어지는 것을 알 수 있으나 안정성에는 그리 영향을 미치지 않고 편차의 크기에 관계없이 안정되게 수렴하는 것을 알 수 있다.



(a) 10% standard deviation

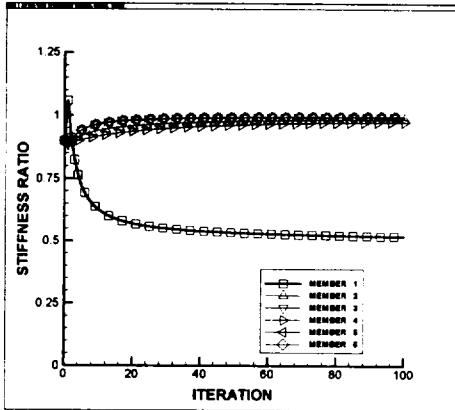


(b) 30% standard deviation

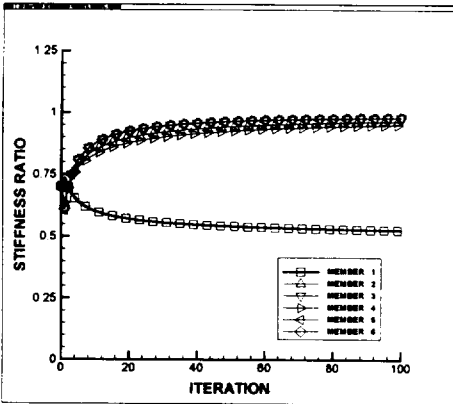


(b) 50% standard deviation

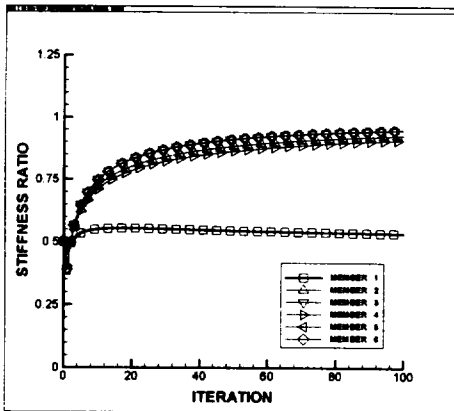
Fig. 4 Effects of the standard deviation of the observed data



(a) 10% initial damage



(b) 30% initial damage



(c) 50% initial damage

Fig. 5 Effects of the initial state as the damage rate

Fig. 5는 상태량의 초기치에 따른 수렴성을 보이고 있다. Fig. 5의 (a), (b), (c)는 전체 부재에 대하여 초기 손상의 정도를 정상치에 대해 각각 10%, 30%, 50%의 손상으로 가정한 경우의 결과이다. 초기 가정 손상이 클수록 수렴은 늦어지나 안정되게 수렴되는 것을 알 수 있고 손상부재 뿐만 아니라 정상부재에 대해서도 상태량을 精度가 좋게 추정하고 있음을 알 수 있다.

V. 결론

본 논문은 트러스 구조물의 자유진동문제와 확장 Kalman filter를 이용하여 트러스 구조물의 부재 손상추정 해석법을 제시하였다. 부재 손상도를 부재 강성의 저하로 평가하였고 따라서 상태량으로는 부재강성을, 관측데이터로는 구조물의 고유진동수를 채택하였다. 2차원 트러스 모델에 대하여 제안해법을 적용한 결과를 정리하면 다음과 같다.

(1) 제안해법을 단일부재 손상 및 복수개의 부재 손상추정에 적용한 결과 손상위치 및 손상도를 精度가 좋게 추정할 수 있었다.

(2) 관측잡음의 관측데이터에 대한 표준편차는 커질수록 수렴은 늦어지나 안정된 수렴을 나타내었다.

(3) 상태량의 초기치로서 전체부재의 손상도를 크게 잡을수록 수렴은 늦어지나 안정된 수렴을 나타내었다.

이상으로 제안한 확장 Kalman filter를 이용한 트러스 구조물의 손상추정 해석법의 적용성을 보였으나 본 연구에서는 관측량으로서 고유진동수만을 대상으로 하고 있기 때문에 대칭형태의 구조물 등 보다 일반적인 경우에 대해서도 적용하기 위해서는 고유 mode도 관련된 평가가 필요할 것이다.

참고문헌

- 1) 岡本良夫, 1992, 逆問題とその解き方, オーム社
- 2) 久保司郎, 1992, 逆問題, 焙風館
- 3) 登坂宣好, 1994, 逆問題入門, 有限要素法の基礎, 朝

倉書店

- 4) C.W. Groetsh, 1996, 數理科學における逆問題, 數理科學, サイエンス社
- 5) 古口日出男, 渡部 浩, 矢田敏夫, 1994, 遺傳的アルゴリズムを用いた二次元彈性逆解析(複數圓形缺陷の同定に關する基礎的考察), 日本機械學會論文集(A編), Vol. 60, p.121
- 6) 中村正行, 田中正隆, 1994, 缺陷同定問題の動彈性逆解析への遺傳的アルゴリズムの應用, 日本機械學會論文集(A編), Vol. 60, p.116
- 7) 近藤一平, 濱本卓司, 1992, 既存構造物の局所損傷の同定に關して, 日本建築學會 構造工學論文集, Vol. 38B, p.189-199
- 8) 近藤一平, 濱本卓司, 1993, 多變量ARMAモデルによる既存構造物の損傷位置の同定, 日本建築學會構造工學論文集, Vol. 39B, pp.87-97
- 9) R.E. Kalman, 1996, A new approach to linear filtering and prediction problems, Trans. ASME, *J. Basic Eng.*, 82 D(1), p.34
- 10) 片山 徹, 1983, 應用カルマンフィルタ, 朝倉書店
- 11) 西山 清, 1993, パソコンで解くカルマンフィルタ, 丸善
- 12) Brown, R.G. and Hwang, P.Y.C., 1997, *Introduction to random signals and applied Kalman filtering*, 3rd ed., John Wiley & Sons, New York
- 13) 宇谷明秀, 高橋秀郎, 登坂宣好, 1995, フィルタ理論による複數個の未知缺陷同定解析, 第8回計算力學講演會講演論文集, p.311
- 14) Tosaka, N., Utani, A. and Takahashi, H., 1995, Unknown defect identification in elastic field by boundary element method with filtering procedure, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 15, pp.207-215
- 15) 登坂宣好, 宇谷明秀, 1996, 高橋秀郎, 彈性體に内在する複數缺陷の同定解析, 計算工學講演會論文集, 1, 2, p.329