

신경망을 이용한 2-bit A/D 컨버터의 과도해석

김 용 완* · 강 민 제**

Transient Analysis of Two-bit Neural A/D Converter

Yong-Wan Kim* and Min-Je Kang**

ABSTRACT

This paper shows that the capacitance of the input space of the neuron affects the point of convergence of the output of the neuron in Lapunove energy function for Hopfield neural network. And this paper also shows that the gain factor of sygmoid function affects the shape of energy map and the point of convergence of the output of the neuron.

Key words : Neural network, transient analysis

I. 서론

시그모이드 형태의 특성곡선을 갖는 신경세포를 사용한 Hopfield 신경회로망은 계산에너지 함수 즉, 시스템의 Lyapunov 함수를 최소화하면서 안정되게 수렴함을 보였다.^{1,2)} 그 이후로 이러한 시스템의 특성을 많은 부문에 응용하였는데 그 중 하나가 A/D 컨버터이다.

A/D 컨버터를 구현할 때 뉴론의 입력단에 저항과 캐패시터를 달아주는데, 여기서 뉴론의 출력이 최소점에 수렴하는데 캐패시터가 어떠한 영향을 주는지 알아본다. 또한 뉴론의 시그모이드 함수의 이득률 λ 에 따라서 에너지 함수가 어떻게 변하고 수렴점이 또한 어떻게 변하는지 알아본다.

II. 신경망을 이용한 2-bit A/D 컨버터

Fig. 1은 궤환성을 갖는 단층신경회로망의 전기적 모델의 i 번째 뉴론을 보여준다. 이런 형태의 신경망은 궤환성을 가지며 뉴론의 출력들이 다시 다른 뉴론의 입력에 연결강도(w_{ij})들을 통하여 연결된다. j 번째 뉴론의 출력(v_j)과 i 번째 뉴론의 입력(u_i)을 연결하는 연결강도(w_{ij})들은 전기적 모델에서는 컨덕턴스를 사용하며, 뉴론의 출력값은 입력단에 매핑되는 함수로써 주로 시그모이드 함수가 쓰인다.¹⁾ Fig. 2에는 이 논문에서 사용한 2-bit A/D 컨버터의 모델을 보여주고 있다.

신경회로망의 전기적 모델에서 뉴론의 입력단에서 세운 KCL(Kirchhoff's Current Law)을 이용하여 다음의 공식이 유도된다.

$$C_i \left(\frac{du_i}{dt} \right) = \sum_{j=1, j \neq i}^n w_{ij} (v_j - u_i) + i_i - g_i u_i \quad (1)$$

* 제주대학교 대학원

Graduate School, Cheju Nat'l Univ.

** 제주대학교 전기전자공학부

Dept. of Electronics, Cheju Nat'l Univ.

식(1)의 우변은 캐패시터 C_i 로 유입되는 전류의 총량을 나타낸다.

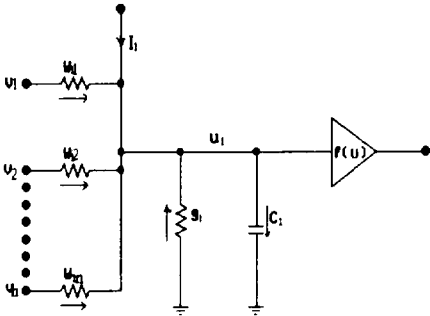


Fig. 1 Input node of ith neuron

이 신경망의 시간에 대한 출력의 변화는 $\frac{dv_i}{dt}$ 로 나타낼수 있고, 연쇄법칙(chain rule)을 써서 i번째 뉴론의 출력의 변화는 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{dv_i}{du_i} * \frac{du_i}{dt} \quad (2)$$

각 뉴론의 입출력 전달함수로는 시그모이드 함수가 쓰이는데 다음과 같다.

$$v_i = f(u_i) = \frac{1}{1 + e^{-\lambda u_i}} \quad (3)$$

u_i 를 v_i 에 관한 식으로 나타내면.

$$u_i = \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{v_i}{1-v_i}\right) \quad (4)$$

식 (3)에서 다음을 유도할 수 있다.

$$\frac{dv_i}{du_i} = \lambda (v_i - v_i^2) \quad (5)$$

식 (1), (2)와 (5)에서 시간에 대한 뉴론의 출력의 변화를 구할 수 있다.

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{\lambda}{C_i} (v_i - v_i^2) (-2v_2 + 2u_1 + x - \frac{1}{2} - g_1 u_1) \quad (6)$$

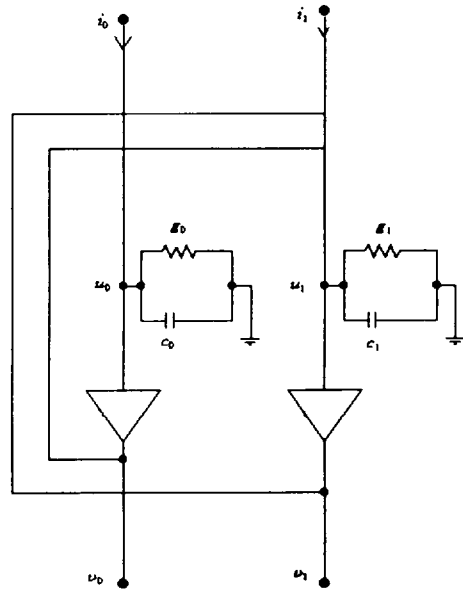


Fig. 2 Two-bit A/D converter

$$\frac{dv_2}{dt} = \frac{\lambda}{C_2} (v_2 - v_2^2) (-2v_1 + 2u_2 + 2x - 2 - g_2 u_2) \quad (7)$$

여기서 x 는 외부 입력, λ 는 시그모이드 함수의 이득률이다. 이 신경망의 시간에 대한 출력의 변화는 식 (6)과 (7)에서 구해지는 $\frac{dv_i}{dt}$ 로 나타내진다. 여기서 뉴론의 출력 v_i 의 함수로서의 $\frac{dv_i}{dt}$ 는 서로 다른 λ 값과 입력단의 연결된 커패시터의 비율 $C_1 : C_2$ 에 따라 달라질 수 있는데 Fig. 3에 나타내었다.

Tank와 Hopfield에 따르면 입력 x 의 값에 따라서 Fig. 2의 신경망은 다음의 한점 (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)로 수렴해 나간다. Fig. 4에서 $x=1.6$, $C_1=0.1 * 10^{-6}$, $C_2=1 * 10^{-6}$ 즉, $C_1 : C_2 = 1 : 10$ 일 때 출력 v_i 의 궤적을 나타내었다.

n 차원의 상태방정식으로 표현되는 시스템의 어떤 계산에너지함수의 값을 따라 점근적으로 안정되게 수렴하여 간다면 그 어떤 계산 에너지 함수를 그 시스템의 Lyapunov함수라 한다. Fig. 2에서 신경회로망의 Lyapunov함수는 다음과 같이 알려져 있다.²⁾

$$E(v) = -\frac{1}{2} v' W v - i' v + \sum_{i=1}^n G_i \int_{\frac{1}{2}}^{v_i} f_i^{-1}(z) dz \quad (8)$$

입력값에 대한 출력값은 입력값 u_i 의 초기 상태에 따라 다르게 나타날 수 있다. 그리고 또한 출력 v_i 가 평형점으로 수렴하는 동안 v_i 의 방향을 결정하는 $C_1 : C_2$ 의 비율에 따라 다르게 나타날 수 있다.

III. 평형점의 안정성 분석

시간에 대해서 뉴런의 출력 v_i 가 변하지 않을 때 뉴런의 출력은 평형점에 있다고 할 수 있다. 따라서 평형점을 v^* 이라고 하면,

$$\lim_{v_i \rightarrow v^*} \frac{dv_i}{dt} = 0 \quad (9)$$

이고, 여기서 평형점을 구할 수 있다.

식 (6)과 (7)에서 볼 수 있듯이(그리고 식 (4)로부터 $v_i \rightarrow 0, 1 \equiv u_i \rightarrow -\infty, +\infty$) 식 (9)는 $v_1 v_2$ 공간에서 $v_i = 0, 1$ 을 만족한다. 또한 식 (9)는 다음을 만족시킨다.

$$-2v_2 + 2u_1 + x - \frac{1}{2} - g_1 u_1 = 0 \quad (10)$$

$$-2v_1 + 2u_2 + 2x - 2 - g_2 u_2 = 0 \quad (11)$$

x 의 값을 1.6이라 놓고 λ 의 값을 0.5, 1, 2로 가정했을 때 식 (10)과 (11)로부터 다음의 해 (v_1, v_2)를 얻을 수 있다.

$$\lambda = 0.5 : (0.4827, 0.5341)$$

$$\lambda = 1 : (0.2814, 0.7907)$$

$$\lambda = 2 : (0.0228, 0.9897), (0.6005, 0.4990), (0.9827, 0.0447)$$

식 (9)의 해의 안정성은 신경회로망의 평형점의 안정성을 결정한다. 그러므로 우리는 다음을 말할 수 있다. 식 (9)의 해에 가까이 있는 상태가 평형점을

향하여 들어가는지(안정), 그 주위를 맴도는지(중립의 안정) 아니면 그 곳을 떠나는지(불안정). Strand에 따르면 이것은 중립인 경우를 제외하고 평형점 주위에서 식 (9)를 선형화시켜서 구할 수 있다.⁶⁾ 그리고 행렬 A 의 고유치 $\mu_{1,2}$ 의 합과 곱에 따라 안정성과 불안정성을 결정할 수 있는데, 여기서 행렬의 고유치의 합과 곱은 각각 trace와 determinant와 같다.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial v_1} & \frac{\partial F_1}{\partial v_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial v_1} & \frac{\partial F_2}{\partial v_2} \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\text{trace}(A) = \frac{\partial F_1}{\partial v_1} + \frac{\partial F_2}{\partial v_2} \quad (13)$$

$$\det(A) = \frac{\partial F_1}{\partial v_1} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial v_2} - \frac{\partial F_1}{\partial v_2} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial v_1} \quad (14)$$

$$\mu_{1,2} = \frac{1}{2} (\text{trace}(A) \pm \sqrt{\text{trace}^2(A) - 4 \det(A)}) \quad (15)$$

이때 F_1, F_2 은 각각 $\frac{dv_1}{dt}, \frac{dv_2}{dt}$ 이다. 그리고 $u_i = f^{-1}(v_i)$ 와 식 (6), (7)로부터 다음을 구할 수 있다.

$$\frac{\partial F_1}{\partial v_1} = \frac{(2-g_1)}{C_1} + \frac{\lambda}{C_1} (1-2v_1)(-2v_2 + \frac{1}{\lambda}(2-g_1) \log(\frac{v_1}{1-v_1}) + x - \frac{1}{2}) \quad (16)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial v_2} = -2 \frac{\lambda}{C_1} (v_1 - v_1^2) \quad (17)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial v_2} = -2 \frac{\lambda}{C_2} (v_2 - v_2^2) \quad (18)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial v_1} = \frac{(2-g_2)}{C_2} + \frac{\lambda}{C_2} (1-2v_2)(-2v_1 + \frac{1}{\lambda}(2-g_2) \log(\frac{v_2}{1-v_2}) + 2x - 2) \quad (19)$$

식 (17), (18)로부터 다음을 구할 수 있다.

$$\forall \lambda, C_i, \quad \frac{\partial F_1}{\partial v_2} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial v_1} > 0 \quad (20)$$

이것은 행렬 A 의 고유치가 실수임을 의미한다. 따라

서 다음과 같은 세가지 경우가 있다.

1. Stable node : $\text{trace}(A) < 0$,
 $\text{det}(A) > 0$.
2. Unstable node : $\text{trace}(A) > 0$,
 $\text{det}(A) > 0$.
3. Unstable saddle point : $\text{det}(A) < 0$.

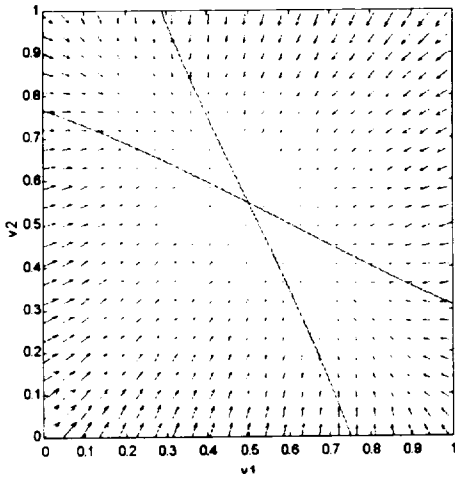
그리고 또한 흥미있는 것은 $v_i = 1, 2$ 로 가정하면

식 (6), (7)로부터 다음을 얻을 수 있기 때문에 v_1, v_2 공간의 구석은 불안정하다는 것이다.

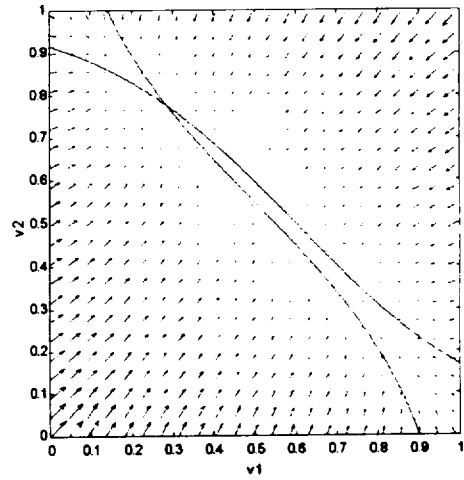
$$\lim_{v_i \rightarrow 0} \frac{dv_i}{dt} = 0^+ \quad (21)$$

$$\lim_{v_i \rightarrow 1} \frac{dv_i}{dt} = 0^- \quad (22)$$

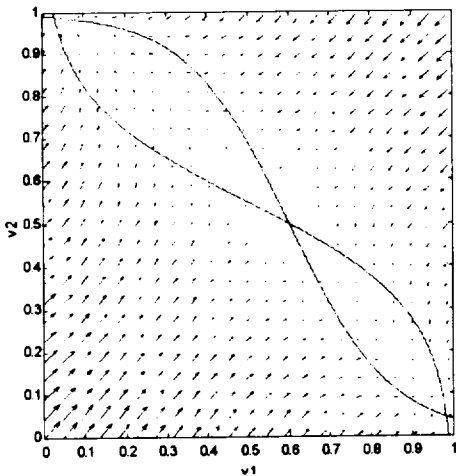
여기서, i, j 는 1, 2일 때 이고, $i \neq j$ 이다.



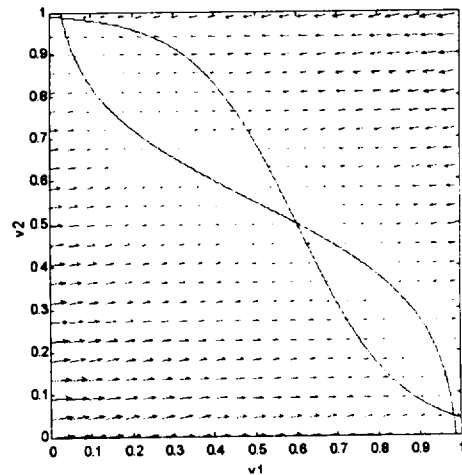
a) where $x=1.6, \lambda = 0.5$ and $c1:c2=1:1$



b) where $x=1.6, \lambda = 1$ and $c1:c2=1:1$

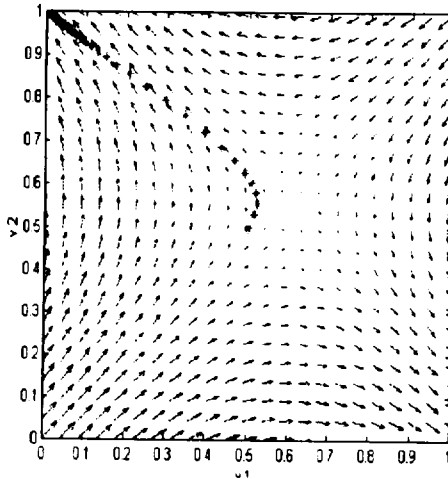


c) where $x=1.6, \lambda = 2$ and $c1:c2=1:1$

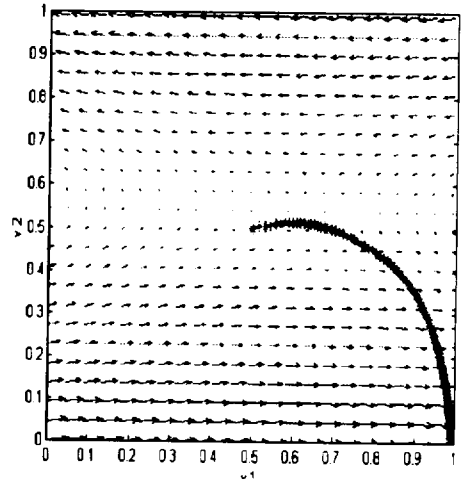


(d) where $x=1.6, \lambda = 2$ and $c1:c2=1:10$

Fig. 3 Vector field of energy and convergence point of output v



a) where $c1:c2=1:1$



b) where $c1:c2=1:10$

Fig. 4 Trajectory of output v with time

IV. 시뮬레이션 및 결과

시뮬레이션은 Matlab 5.2를 가지고 행하였다. 그리고 여기서 사용된 인자들은 $g_0 = g_1 = 2.5$.

$w_{ij} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}$. 외부 입력 $x = 1.6$ 을 사용하였다.

Fig. 3에서 볼 수 있듯이 λ 값에 따라 에너지함수의 벡터 필드와 출력 v 의 수렴점이 달라지는 것을 알 수 있다. 그리고 Fig. 3c, 3d에서 뉴론의 입력단에 연결된 커패시터 또한 뉴론의 출력의 수렴점에 영향을 주는 것을 알 수 있다.

Fig. 4a에서 보면 각 뉴론의 입력단에 연결된 커패시터 2개의 비율이 1:1 즉, $C_1:C_2=1:1$ 인 경우에는 시간이 지남에 따라 뉴론의 출력 v 가 벡터 필드에 표시된 경로를 따라 $(v_1, v_2) = (0.5, 0.5)$ 으로 수렴하였다. 그러나 Fig. 4b에서는 각 뉴론의 입력단에 연결된 커패시터 2개의 비율이 1:10인 경우에는 시간이 지남에 따라 $(v_1, v_2) = (1, 0)$ 으로 수렴하는 것을 볼 수 있다. 이것은 뉴론의 입력단에 연결된 커패시터가 단지 수렴의 속도만을 결정하는 것이 아니라 에너지 맵에서의 수렴 방향도 함께 결정하여 입력의 초기상태에 따라 수렴하는 값도 달라질 수 있다는 것을 보

이고 있다. 만일 Fig. 4b에서 입력의 초기값이 (0.5, 0.5)가 아니고 다른 값, 즉 (0.5, 0.7) 이라면 출력 v 의 값은 (0, 1)로 수렴하여 갈 것이다.

V. 결론

뉴론의 입력단에 연결된 커패시터가 단지 수렴의 속도만 결정하는 것이 아니라 신경회로망의 에너지 맵에 있어서 벡터 필드, 즉 수렴의 방향에 영향을 끼쳐 수렴점을 다르게 하기도 한다. 그리고 시그모이드 함수의 이득을 λ 또한 에너지 맵에 크게 영향을 끼쳐 에너지 함수 전체적인 구도와 수렴점을 바꾸어 놓는다. 또한 뉴론의 입력의 초기값이 뉴론의 출력의 수렴점에 영향을 미친다.

참고문헌

- 1) Hopfield, J. J., 1984. Neurons with Graded Response Have Collective Computational Properties Like Those of Two State Neurons. Proc. National Academy of Sciences 81: 3088-3092.

- 2) Hopfield, J. J., and D. W. Tank. 1985. Neural Computation of Decisions in Optimization Problems. *Biolog. Cybern.* 52: 141-154.
- 3) Hopfield, J. J., and D. W. Tank. 1986. Computing with Neural Circuits: A model. *Science* 233: 625-633.
- 4) Park, S., 1989. Signal Space Interpretation of Hopfield Circuit and a Linear Programming Circuit. *IEEE Trans. Circuits and Systems CAS-33(5)*: 533-541.
- 5) Bernard C. Levy 1987. Global optimization with Stochastic Neural Network. *IEEE. Int. Conf. on NN.* Sandiego, CA. USA.
- 6) G. Strang. *Introduction to Applied Mathematics.* Wellesley-Cambridge press. pp.496-504. 1986.
- 7) 고경희, 강민제. 1997. 계산에너지함수 분석을 통한 Hopfield 신경회로망의 성능 개선. *대한전자공학회 논문집 제 34권 C편 12호.*
- 8) 강민제, 고성택. 1998. 신경회로망의 최적화 개념을 이용한 연산회로. *한국해양정보통신학회논문지 제 2권 제1호.*